2° Trabalho de Matemática Computacional

LEGI e **LERCI** - 2° Semestre 2006/2007

1ª Parte

1. (a) Defina em *Mathematica* uma função que, recebendo uma lista de pontos, contendo, os nós de interpolação e os correspondentes valores a interpolar, retorna o polinómio interpolador nesses pontos obtido pela *fórmula de Newton com diferenças divididas*.

   (b) Usando o programa da alínea anterior, obtenha aproximações polinomiais para as seguintes funções

   (i) $f(x) := e^x \cos(6x)$ no intervalo $[0, 4]$;

   (ii) $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$ no intervalo $[-5, 5]$.

   Considere para nós de interpolação no intervalo $[a, b]$

   • nós equidistantes: $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}, \quad i = 0, ..., n$, e

   • nós de Chebyshev: $x_i = a + \frac{b-a}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right)\right), \quad i = 0, ..., n.$

   Para cada função considerada, faça variar o número de nós de interpolação n e compare graficamente os resultados obtidos. Comente sobre a convergência da interpolação polinomial quando o número de nós de interpolação tende para infinito.

2. (a) Defina em *Mathematica* uma função que, recebendo $a, b \in \mathbb{R}$, uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e um natural (par) n retorna uma aproximação do integral $\int_a^b f(x)dx$ pela regra de Simpson

$$S_n(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i})\right],$$

   onde $h = (b-a)/n$.

   (b) Calcule um valor aproximado de

$$\arctan t = \int_0^t \frac{1}{1+x^2}dt$$

   para $t = 1, 5, 10$ usando a regra de Simpson.

3. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \ t \in [a, b] \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

   e o método de Heun

$$\begin{cases} y_0 = \alpha, \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}\left(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_i + hf(t_i, y_i))\right), i = 0, ..., N-1 \end{cases}$$

   onde $h = (b-a)/N$, que fornece uma aproximação de y nos pontos $t_i = a + ih$, $i = 1, ..., N$,

$$y(t_i) \simeq y_i, \quad i = 1, ..., N.$$

(a) Defina em *Mathematica* uma função que, recebendo $a, b \in \mathbb{R}$, uma função $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{N}$, retorne a lista com os valores $y_0, y_1, ..., y_N$, produzidos pelo método de Heun.

(b) Aplique o método de Heun ao problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - \dfrac{2t}{y(t)}, \ t \in [0, 10] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

com vários valores de N. Sabendo que a solução exacta deste problema é $y(t) = \sqrt{2t+1}$, calcule os erros exactos das aproximações obtidas e comente sobre a convergência do método de Heun quando N tende para infinito.

2ª Parte

1. Num determinado ponto de um circuito eléctrico de corrente alternada mediu-se a intensidade de corrente (I, em Amperes) ao longo do tempo (t, em segundos), tendo sido registados os seguintes valores

t	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
I	1.9636	-0.102257	-1.51000	-1.27783	0.061486	1.25495

Escolha convenientemente os nós de interpolação por forma a calcular valores aproximados de I em $t = 0.35$, utilizando polinómios interpoladores de grau n, com $1 \leq n \leq 5$. Compare os resultados obtidos e comente.

2. Considere-se um projéctil disparado com uma velocidade inicial $v_0 = (10, 20)m/s$. A distância (em metros) percorrida pelo projéctil ao fim de t segundos é dada por

$$L(t) = \int_0^t \sqrt{v_x(s)^2 + v_y(s)^2} ds,$$

onde $v = (v_x, v_y)$ é a sua velocidade[1]. Usando a regra de Simpson, obtenha aproximações da distância percorrida pelo projéctil ao fim de $t = 10s$, nos seguintes casos:

(i) $v_x(s) = v_{0,x}$ e $v_y(s) = v_{0,y} - gs$, sendo $g = 9.8m/s^2$;

(ii) $v_x(s) = v_{0,x} \exp(-1.5s)$ e $v_y(s) = v_{0,y} - gs$.

3. Foi colocado um bloco de $10Kg$ de material solúvel num recipiente contendo $60l$ de água pura. A quantidade de material dissolvido Q, dada em percentagem, em cada instante verifica a equação diferencial

$$(60 - 1.2Q)\frac{dQ}{dt} = 0.0589\frac{10 - 4Q}{3}.$$

Usando o método de Heun, determine um valor aproximado para a quantidade de material dissolvido ao fim de $120s$.

[1] As coordenadas são dadas num sistema em que o eixo dos x é paralelo à superfície da Terra e o eixo dos y é perpendicular à mesma.