

1ª aula prática de Análise Numérica II

1º semestre de 2002/2003

1. Considere uma lista de abscissas $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_N\}$ e a respectiva lista de ordenadas $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_N\}$. Pretendemos que uma função da forma

$$S(x) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{(x - x_k)^2 + \beta}$$

verifique $S(x_k) = y_k$, $k = 1, \dots, N$.

(a) Escreva o sistema que permite obter os coeficientes c_k .

(b) Mostre que é sempre possível encontrar $\beta > 0$ tal que o sistema da alínea anterior tenha solução única.

(c) Considere os pontos dados na tabela

x_k	-1	1	3	4	6
y_k	1	-1	10	0	1

Para $\beta = 1$, determine a função S que verifica $S(x_k) = y_k$, $k = 1, \dots, 5$.

2. Seja $\{u_1, \dots, u_n\} \subset C[a, b]$ um conjunto linearmente independente e sejam x_1, \dots, x_n pontos distintos no intervalo $[a, b]$. Dados valores $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, consideremos o problema de interpolação: encontrar uma função $u \in U_n := \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$ verificando

$$u(x_j) = y_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Mostre que as três propriedades seguintes são equivalentes:

(a) O problema de interpolação tem solução única para cada conjunto de valores $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

(b) Cada função $u \in U_n$ com zeros x_j , $j = 1, \dots, n$ anula-se identicamente.

(c) A matriz $n \times n$ com entradas $u_k(x_j)$, $k, j = 1, \dots, n$, é invertível.

3. Dados n pontos distintos $z_1, \dots, z_n \notin [a, b]$, n pontos distintos $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, e n valores $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, mostre que existe uma única função da forma

$$u(x) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{x - z_k}$$

com coeficientes reais a_1, \dots, a_n tal que $u(x_j) = y_j$, $j = 1, \dots, n$.

4. Considere a *matriz de Vandermonde*

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

com $x_i \in \mathbb{R}$. Mostre que

(a) $\det V = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ e conclua que se os pontos x_0, \dots, x_n são distintos, então V é

invertível

(b) se os pontos x_0, \dots, x_n são distintos, então $V^{-1} = U^T$, onde $U = [u_{ij}]_{i,j=0}^n$ com $l_i(x) = \sum_{k=0}^n u_{ik} x^k$.

5. Sejam x_1, \dots, x_N ($N \geq 2$) valores reais distintos e f_1, \dots, f_N os valores correspondentes de uma função f nesses pontos. Prove que existe uma e uma só função F_N da forma

$$F_N(x) = \sum_{j=1}^N c_j \exp(jx),$$

para a qual se tem $F_N(x_i) = f_i$, $i = 1, \dots, N$.

6. Sejam x_0, \dots, x_n valores reais distintos e sejam l_0, \dots, l_n os polinômios de base de Lagrange associados. Mostre que

(a) $\sum_{j=0}^n x_j^m l_j(x) = x^m$, $m = 0, 1, \dots, n$

(b) o polinômio $H_k^0(x) := [1 - 2l'_k(x)(x - x_k)] [l_k(x)]^2$ verifica

$$H_k^0(x_i) = \delta_{ik}, \quad (H_k^0)'(x_i) = 0, \quad i, k = 0, \dots, n,$$

e $H_k^1(x) := (x - x_k) [l_k(x)]^2$ verifica

$$H_k^1(x_i) = 0, \quad (H_k^1)'(x_i) = \delta_{ik}, \quad i, k = 0, \dots, n.$$

7. Mostre que as diferenças divididas

$$\begin{cases} D_j^0 = y_j, & j = 0, \dots, n \\ D_j^k = \frac{D_{j+1}^{k-1} - D_j^{k-1}}{x_{j+k} - x_j}, & j = 0, \dots, n - k, \quad k = 1, \dots, n \end{cases}$$

relativas aos $n + 1$ pontos distintos x_0, \dots, x_n e $n + 1$ valores $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, satisfazem a relação

$$D_j^k = \sum_{m=j}^{j+k} y_m \prod_{i=j, i \neq m}^{j+k} \frac{1}{x_m - x_i}, \quad j = 0, \dots, n - k, \quad k = 1, \dots, n.$$

8. Dada uma função $f \in C^2[a, b]$ e três pontos $x_0, x_1, x_2 \in [a, b]$, com $x_0 \neq x_2$, mostre que existe um único polinômio p de grau não superior a 3 para o qual se tem

$$p(x_0) = f(x_0), \quad p'(x_1) = f'(x_1), \quad p''(x_1) = f''(x_1), \quad p(x_2) = f(x_2).$$

1ª questão do 1º trabalho computacional

(a) Defina em *Mathematica* uma função que, recebendo duas listas de pontos, contendo, respectivamente, os nós (distintos) de interpolação e os correspondentes valores a interpolar, retorna o polinômio interpolador nesses pontos obtido pela *fórmula de Newton com diferenças divididas*.

(b) Usando o programa da alínea anterior, obtenha aproximações para as seguintes funções, considerando vários conjuntos de nós de interpolação,

(i) $f(x) := \exp x$ no intervalo $[0, 2]$;

(ii) $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ no intervalo $[0, 5]$, usando nós de interpolação equidistantes;

(iii) $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ no intervalo $[0, 5]$, usando nós de Chebyshev.

Apresente as expressões dos polinômios interpoladores e compare graficamente os resultados obtidos. Investigue a convergência da interpolação polinomial quando o número de nós de interpolação tende para infinito.