14^{a} aula prática de Análise Numérica II

1^{o} semestre de 2002/2003

1. Sejam

$$N_1(v) = \left(\int_a^b (|v|^2 + |v'|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad N_2(v) = \left(\int_a^b |v'|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Mostre que

(a) N_2 é uma norma em $H_0^1(a,b)$.

(b) N_1 e N_2 são normas equivalentes em $H_0^1(a,b)$.

2. Considere o problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} u'' - Ku + p = 0, & \text{em }]0,1[\\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

onde K é uma constante positiva e $p \in L^2(0,1)$.

(a) Mostre que o problema (1) tem uma e uma só solução fraca.

(b) Escreva a contrapartida de Galerkin para a formulação fraca.

(c) Mostre que a matriz correspondente à aproximação de Galerkin é simétrica e definida positiva.

Suponha $K = 1$ e $p(x) := x$.

(d) Calcule a aproximação por elementos finitos u_h supondo o domínio dividido em 3 elementos de igual comprimento.

(e) Compare, através de gráficos, a solução exacta com a solução aproximada bem como as respectivas derivadas.

3. Considere o problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left((1+x)\dfrac{du}{dx}(x) \right) = f(x), & \text{em }]0,1[\\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

onde $f \in C[0,1]$.

(a) Escreva uma formulação fraca do problema (2).

(b) Seja N um inteiro positivo, $h = \frac{1}{N}$, $x_j = jh$, $j = 0, 1, ..., N$. Considere o método de Galerkin no caso em que o espaço V_h é gerado pelas funções de base $\varphi_1, ..., \varphi_{N-1}$ definidas por

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \le x \le x_i, \\ \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 0, \quad x \le x_{i-1}, & x \ge x_{i+1} \end{cases}$$

Calcule explicitamente a matriz do sistema a resolver.