9^{a} aula prática de Análise Numérica II

1^{o} semestre de 2002/2003

1. Mostre que a fórmula de integração

$$Q_n(f) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

define um funcional linear limitado em $C[a,b]$ com norma $\|Q_n\|_\infty = \sum_{i=0}^{n} |A_i|$.

2. **(a)** Mostre que os pesos das fórmulas de Gauss são positivos.

(b) O que pode concluir quanto à convergência destas fórmulas quando o número de nós de integração tende para infinito?

3. Deduza as fórmulas de Gauss-Legendre, incluindo a expressão do erro, para aproximar o integral $\int_a^b f(x)dx$.

4. **(a)** Mostre que na fórmula de Gauss-Chebyshev com $n+1$ nós, os pesos são $A_i = \frac{\pi}{n+1}$, $i = 0, ..., n$.

(b) Obtenha um valor aproximado para o integral $\int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{4}}dx$ pela fórmula de Gauss-Chebyshev com grau de precisão 7.

5. Considere o integral $\int_0^1 \exp(x^2)dx$.

(a) Determine o seu valor aproximado, considerando 4 subintervalos e utilizando

(i) a regra dos trapézios;

(ii) a regra de Simpson.

(b) Faça uma estimativa do número de subintervalos que deveria considerar, se pretendesse calcular o integral da alínea anterior com erro inferior a 10^{-4}, utilizando

(i) a regra dos trapézios;

(ii) a regra de Simpson.

6. Utilizando a regra dos trapézios composta, mostre que

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

7. Dedução da <u>Regra do ponto médio</u>

(a) Mostre que

$$\int_{a_0-\frac{h}{2}}^{a_0+\frac{h}{2}} f(x)dx = hf(a_0) + \frac{h^3}{24}f''(\theta), \quad \theta \in [a_0 - \frac{h}{2}, a_0 + \frac{h}{2}]$$

(b) Deduza a respectiva fórmula composta para aproximar um integral $\int_a^b f(x)dx$, incluindo a expressão do erro.

8. Mostre que
(a) se $f \in H^2(a,b)$, o erro na regra dos trapézios composta é dado por

$$\int_a^b f(x)dx - T_h(f) = -\int_a^b K_T f''(x)dx,$$

onde o *núcleo de Peano* K_T é dado por $K_T = \frac{1}{2}(x - x_{i-1})(x_i - x)$, $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, para $i = 1, ..., n$.
(b) se $f \in H^4(a,b)$, o erro na regra de Simpson composta é dado por

$$\int_a^b f(x)dx - S_h(f) = -\int_a^b K_S f^{(4)}(x)dx,$$

onde o *núcleo de Peano* K_S é dado por

$$K_S = \begin{cases} \dfrac{h}{18}(x - x_{i-2})^3 - \dfrac{1}{24}(x - x_{i-2})^4, \ x_{i-2} \leq x \leq x_{i-1}, \\ \dfrac{h}{18}(x_i - x)^3 - \dfrac{1}{24}(x - x_i)^4, \ x_{i-1} \leq x \leq x_i \end{cases}$$

para $i = 2, ..., n$.

9. Implemente, em *Mathematica*, as fórmulas de quadratura de Romberg para aproximar $\int_a^b f(x)dx$, definidas recursivamente do seguinte modo. Sejam

$$T_k^1(f) := T_{h_k}^1(f), \quad k = 0, 1, ...$$

as somas trapezoidais para os passos $h_k = h/2^k$, sendo h fixado inicialmente. Para $m = 1, 2, ...$ as quadraturas de Romberg são definidas por

$$T_k^{m+1}(f) := \frac{1}{4^m - 1}\left[4^m T_{k+1}^m(f) - T_k^m(f)\right].$$

É possível mostrar que

$$\lim_{m\to\infty} T_k^m(f) = \int_a^b f(x)dx \text{ e } \lim_{k\to\infty} T_k^m(f) = \int_a^b f(x)dx$$