

# 13ª aula prática de Análise Numérica II

1º semestre de 2002/2003

1. Considere o problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) = 0, & x \in ]0, 1[ \\ u(0) = 0, & u(1) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

(a) Determine a solução exacta de (1).

(b) Obtenha uma aproximação da solução da equação (1) pelo método das diferenças finitas com  $h = 0.25$  e compare com a solução exacta.

2. (a) Mostre que o problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( (2 + 0.5x \cos(x^2)) \frac{du}{dx} \right) = u(x) + 1, & x \in ]1, 2[ \\ u(1) = 1, & u(2) = 5 \end{cases} \quad (2)$$

tem uma e uma só solução.

(b) Obtenha aproximações da solução da equação (2) considerando  $h = 0.25, 0.1, 0.05, \dots$ . Represente os resultados numa tabela que inclua os pontos  $x_i = 0.25i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , e comente.

3. Considere o seguinte problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in ]0, L[ \\ u(0) = 0, & u(L) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

onde  $f$  é uma função suficientemente regular definida em  $[0, L]$ .

(a) Verifique que a solução de (7) é dada por

$$u(x) = - \int_0^x F(s) ds + \frac{x}{L} \int_0^L F(s) ds, \text{ com } F(x) = \int_0^x f(s) ds.$$

Se as funções  $f$  e/ou  $F$  não forem primitiváveis, torna-se necessário proceder a uma aproximação da solução.

(b) Mostre que o esquema de diferenças finitas associado aos pontos

$$x_i = ih \quad 0 \leq i \leq N, \quad h = \frac{L}{N},$$

se escreve

$$\begin{cases} \frac{2u_1 - u_2}{h^2} = f_1, \\ \frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{h^2} = f_i, & 2 \leq i \leq N-2, \\ \frac{2u_{N-1} - u_{N-2}}{h^2} = f_{N-1} \end{cases} \quad (4)$$

Na forma matricial, o sistema (4) fica  $A.U = F$ , com

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

(c) Seja  $f \in C^2([0, L])$ . Mostre que

$$\left| \frac{2u(x) - u(x+h) - u(x-h)}{h^2} + u''(x) \right| \leq \frac{h^2}{12} \max_{y \in [0, L]} |f''(y)|.$$

(d) Mostre que a matriz  $A^{-1} = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{N-1}$  verifica  $\alpha_{ij} \geq 0$  e

$$0 < \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{ij} \leq \frac{L^2}{8}, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (6)$$

(e) Mostre que

$$\max_{1 \leq i \leq N-1} |u(x_i) - u_i| \leq \frac{L^2 h^2}{96} \max_{y \in [0, L]} |f''(y)|$$

(f) Aproxime a solução da equação (7) nos seguintes casos

**i.**  $L = 10$ ,  $f(x) = x^2$ .

**ii.**  $L = 2$ ,  $f(x) = \sin(x^2)$ ,

considerando  $h = 0.25, 0.1, 0.05, 0.01, \dots$  e obtenha um majorante do erro  $\max_{1 \leq i \leq N-1} |u(x_i) - u_i|$ .

No caso **i.**, obtenha a solução exacta e compare com as aproximações obtidas, calculando os erros  $|u(x_i) - u_i|$ .

### 3ª questão do 3º trabalho computacional

Considere o seguinte problema com condições na fronteira

$$\begin{cases} u''(x) = p(x)u'(x) + q(x)u(x) + f(x), & x \in ]0, L[ \\ u'(0) - au(0) = 0, & u(L) = b \end{cases} \quad (7)$$

onde  $f$ ,  $p$  e  $q$  são funções contínuas em  $[0, L]$ . Se

$$q(x) \geq \gamma > 0, \quad \forall x \in [0, L]$$

e se  $a \geq 0$ , então o problema (7) tem solução única.

Neste trabalho pretende-se aproximar a solução de (7) pelo *método das diferenças finitas*. Sendo

$$x_i = ih \quad 0 \leq i \leq N, \quad h = \frac{L}{N},$$

aproximam-se as derivadas  $u'(x_i)$  e  $u''(x_i)$  por

$$u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad u''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq N-1.$$

onde  $u(x_j) \approx u_j$ ,  $0 \leq j \leq N$ . A substituição destas fórmulas em (7) conduz ao sistema linear para os  $u_j$

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = p_i \left( \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \right) + q_i u_i + f_i \quad 1 \leq i \leq N-1. \quad (8)$$

onde  $p_i = p(x_i)$ ,  $q_i = q(x_i)$  e  $f_i = f(x_i)$ . Trata-se de um sistema de  $N-1$  equações com  $N+1$  incógnitas,  $u_j$ ,  $0 \leq j \leq N$ .

Impondo as condições de fronteira, obtém-se um sistema de  $N$  equações com  $N$  incógnitas. De facto, a incógnita  $u_N$  é imediatamente eliminada usando a condição  $u(x_N) = u(L) = b$ , que permite obter, para  $i = N-1$ ,

$$\frac{b - 2u_{N-1} + u_{N-2}}{h^2} = p_{N-1} \left( \frac{b - u_{N-2}}{2h} \right) + q_{N-1} u_{N-1} + f_{N-1}.$$

Consideramos agora a seguinte aproximação

$$u(x_1) \approx u(0) + u'(0)h + u''(0)\frac{h^2}{2}$$

Usando a condição  $u'(0) = au(0)$  e  $u''(0) = p(0)u'(0) + q(0)u(0) + f(0) = ap(0)u(0) + q(0)u(0) + f(0)$ , obtém-se uma nova equação

$$u_1 = u_0 \left( 1 + ah + ap_0 \frac{h^2}{2} + q_0 \frac{h^2}{2} \right) + \frac{h^2}{2} f_0.$$

Portanto, o esquema numérico considerado escreve-se

$$\begin{cases} - \left( 1 + ah + ap_0 \frac{h^2}{2} + q_0 \frac{h^2}{2} \right) u_0 + u_1 = \frac{h^2}{2} f_0, \\ (1 + \frac{h}{2} p_i) u_{i-1} - u_i (2 + h^2 q_i) + u_{i+1} (1 - \frac{h}{2} p_i) = h^2 f_i, & 1 \leq i \leq N-2, \\ (1 + \frac{h}{2} p_{N-1}) u_{N-2} - (2 + h^2 q_{N-1}) u_{N-1} = h^2 f_{N-1} - b(1 - \frac{h}{2} p_{N-1}) \end{cases} \quad (9)$$

Na forma matricial, o sistema (9) fica  $A.U = F$  com

$$A = \begin{bmatrix} -\left(1 + ah + ap_0 \frac{h^2}{2} + q_0 \frac{h^2}{2}\right) & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ (1 + \frac{h}{2}p_1) & -(2 + h^2q_1) & (1 - \frac{h}{2}p_1) & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & (1 + \frac{h}{2}p_{N-2}) & -(2 + h^2q_{N-2}) & (1 - \frac{h}{2}p_{N-2}) \\ & & & 0 & (1 + \frac{h}{2}p_{N-1}) & -(2 + h^2q_{N-1}) \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2}f_0 \\ h^2f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2f_{N-2} \\ h^2f_{N-1} - b(1 - \frac{h}{2}p_{N-1}) \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}$$

1. Indique condições suficientes para que o sistema (9) tenha solução única.

2. Implemente em *Mathematica* o método das diferenças finitas, considerando como dados as funções  $f$ ,  $p$  e  $q$ , as constantes  $L$ ,  $a$  e  $b$ , e o número de pontos da discretização (ou o passo  $h$ ).

3. Considere o problema

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) = 0, & x \in ]0, 2[ \\ u(0) = u'(0), & u(2) = 1 \end{cases} \quad (10)$$

(a) Determine a solução exacta de (10).

(b) Obtenha uma aproximação da solução da equação (10) considerando  $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.01, \dots$ . Represente graficamente as aproximações obtidas e compare com a solução exacta. Apresente ainda uma tabela que inclua os valores aproximados e a solução exacta nos pontos  $x_i = 0.2i$ ,  $i = 0, \dots, 9$ . Comente os resultados.

4. (a) Mostre que o problema

$$\begin{cases} (1 + x^2)u''(x) + \sin(x^2)u'(x) - u(x) = \exp(2.5 - \frac{x^2}{100}), & x \in ]0, 10[ \\ u'(0) = 1, & u(10) = 7.5 \end{cases} \quad (11)$$

tem uma e uma só solução.

(b) Obtenha aproximações da solução da equação (11) considerando  $h = 0.5, 0.25, 0.1, 0.05, 0.01, \dots$ . Represente graficamente e numa tabela que inclua os pontos  $x_i = 0.5i$ ,  $i = 0, \dots, 19$ , as aproximações obtidas. Comente os resultados.