UTL - Instituto Superior Técnico – *Departamento de Matemática*
Exame de Matemática Computacional – MEFT (5 de Fevereiro de 2009: 9h00-11h30)

Nome do Aluno: [ ]

Número do Aluno: [ ] Trab. Grupo: [2008 |2007 | NÃO] Trab. Indiv.: [SIM | NÃO]

Preencha as respostas pedidas nesta folha e as restantes respostas e todas as justificações na folha de exame.

1a)[2.0] Num sistema FP(10,10,-100,100), ao pretender calcular, com $x = 10$, a função

$$g(x) = \exp(-\exp(x)),$$

numa calculadora normal, um utilizador pode obter $g(x) = 0$.

(i) Qual é o erro que a máquina deveria sinalizar, impedindo o utilizador de prosseguir o seu cálculo? (... e evitando assim obter um valor nulo para a exponencial, que é sempre positiva!)

(ii) Para que valores $x \in \mathbb{N}$ é possível apresentar um resultado nesse sistema FP, que contenha apenas erros de arredondamento?

1b)[2.0] Considere o algoritmo W para o cálculo de $f(x) = x - g(x)$:

$$w_1 = -e^x; w_2 = e^{w_1}; w_3 = x - w_2.$$

(i) Quando $\delta_x = 0$, apresente $\delta_{w_3} \approx$ [ ]

(ii) Comente acerca do condicionamento de f e da estabilidade numérica de W (para qualquer x), em termos das raízes de f.

2. Considere de novo a função $f(x) = x - g(x) = x - \exp(-\exp(x))$.

2a)[2.5] Mostre que f tem um único zero $z \in [0, 100]$, e que a sucessão

$$x_0 = 0; \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \exp(-\exp(x_n))}{1 + \exp(x_n - \exp(x_n))}$$

converge quadraticamente para z.

2b)[3.5] Seja $y_{n+1} = g(y_n)$, com qualquer $y_0 \in \mathbb{R}$.

(i) Mostre que $y_n \to z$.

(ii) Justifique ao fim de quantas iterações $n \geq$ [ ] pode garantir $|x_n - y_n| \leq 10^{-6}$.

($x_n$representam os termos da sucessão definida em 2a)

(iii) Considere o método do ponto fixo vectorial

$$X^{(n+1)} = \begin{bmatrix} X_1^{(n+1)} \\ X_2^{(n+1)} \end{bmatrix} = G(X^{(n)}) = \begin{bmatrix} \exp(X_2^{(n)}) \\ -\exp(X_1^{(n)}) \end{bmatrix}.$$

Relacione as componentes do ponto fixo vectorial $Z = G(Z)$ com $z = g(z)$.

Calcule $X^{(2)} =$ [(,)], iniciando $X^{(0)} = (0, 0)$.

$\boxed{\textbf{3a)}_{[2.5]}}$ Sabendo que $f(x) - (1 - x^2 + x^3)$ se anula em $-1, 0, 1, 2$, determine:
(i) o polinómio interpolador de f nos nós $0, 1, 2, 3$, quando f é um polinómio de 3ºgrau:

$p(x) = \boxed{}$;

(ii) o polinómio interpolador de f nos nós $-1, 0, 1, 2, 3$, sabendo que $f[0, 1, 2, 3] = 3$:

$p(x) = \boxed{}$.

$\boxed{\textbf{3b)}_{[4.0]}}$ Pretende-se determinar o sistema e a solução para os coeficientes em $g(x) = a + b(x+1) + c/(x+1)$ que permitem a melhor aproximação de $f(x) = \sqrt{x+1}$, no intervalo $[0, 1]$, no sentido dos mínimos quadrados (contínuos).

(i) Preencha as entradas da matriz e do vector do sistema normal:

$$\begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{bmatrix};$$

(ii) Aproxime a solução do sistema usando uma iteração do método de Gauss-Seidel, começando com $(a_0, b_0, c_0) = (0, 0, 0)$:

$(a_1, b_1, c_1) = \boxed{(, ,)}$.

Justifique se o método irá convergir ou não.

[caso não tenha efectuado (i), use a matriz de Hilbert, e (1,2,3) no segundo membro]

$\boxed{\textbf{4a)}_{[2.0]}}$ Usando as aproximações dos integrais $\int_1^{2N+1} \frac{1}{x} dx$ e $\int_2^{2N+2} \frac{1}{x} dx$, pela regra de Simpson composta, com $h = 1$, determine um valor aproximado de

$$S = \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k} \approx \boxed{} \text{ (em função de } N\text{)}.$$

$\boxed{\textbf{b)}_{[1.5]}}$ Considere $x(0) = 1$ e a equação diferencial ordinária

$$x'(t) = 2^{-x(t)}.$$

Considerando $h = 1$, determine uma aproximação de $x(2)$ pelo método de Taylor de ordem 2:

$x(2) \approx \boxed{}$.

χ-resolução

$\boxed{\textbf{1a)}_{[2.0]}}$ (i) Temos $g(10) = e^{-\exp(x)} = 10^{\log_{10}(e)(-\exp(10))} = 10^{-9565.97} < 0.1 \times 10^{-100}$, assim ocorre um erro de *underflow.*

ii) Para evitar o *underflow* nesse sistema FP devemos ter

$$g(x) = e^{-\exp(x)} \geq 0.1 \times 10^{-100} \Leftrightarrow -\exp(x) \geq \log(0.1 \times 10^{-100})$$
$$\Leftrightarrow x \leq \log(-\log(10^{-101})) = \log(101\log(10)) = 5.4492..$$

e portanto $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$\boxed{\textbf{1b)}_{[2.0]}}$ (i) Temos sucessivamente, quando $\delta_x = 0$,

$$\delta_{w_1} \approx x\delta_x + \delta_{arr_1} = \delta_{arr_1}; \qquad \delta_{w_2} \approx w_1\delta_{w_1} + \delta_{arr_2} = -e^x\delta_{arr_1} + \delta_{arr_2};$$
$$\delta_{w_3} \approx \frac{x}{f(x)}\delta_x - \frac{w_2}{f(x)}\delta_{w_2} + \delta_{arr_3} = \frac{e^{-\exp(x)}}{x - e^{-\exp(x)}}(e^x\delta_{arr_1} - \delta_{arr_2}) + \delta_{arr_3}$$
$$= \frac{e^{x-\exp(x)}}{x - e^{-\exp(x)}}\delta_{arr_1} - \frac{e^{-\exp(x)}}{x - e^{-\exp(x)}}\delta_{arr_2} + \delta_{arr_3}$$

(ii) Da fórmula do condicionamento resulta

$$\delta_{f(x)} \approx \frac{xf'(x)}{f(x)}\delta_x = \frac{x(1 + \exp(x)e^{-\exp(x)})}{f(x)}\delta_x = \frac{x(1 + e^{x-\exp(x)})}{f(x)}\delta_x$$

Seja z uma raiz: $f(z) = 0$. Se $x \approx z$ a função f é mal condicionada porque $\lim_{x\to z} \frac{x(1+e^{x-\exp(x)})}{f(x)} = \frac{z(1+e^{z-\exp(z)})}{0} = \infty$

já que $z \neq 0$ (pois $f(0) = -e^{-1} \neq 0$), e $1 + e^{z-\exp(z)} > 0$. Nesses casos haverá também instabilidade do algoritmo W, mesmo que $\delta_x = 0$, conforme se pode observar da expressão de δ_{w_3} (os denominadores são $f(x)$ e o numerador não se anula, nos coeficientes de δ_{arr_1} e δ_{arr_2}). Notamos ainda que não há mau condicionamento ou instabilidade quando $|x| \to +\infty$.

$\boxed{\textbf{2a)}_{[2.5]}}$ A sucessão é da forma $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$, ou seja é o método de Newton, com iterada inicial $x_0 = 0$. Vejamos as condições do teorema:

1) $f(0) = -e^{-1} < 0, \quad f(100) = (100 - e^{-\exp(100)}) \approx 100 > 0$

2) $f'(x) = 1 + \exp(x - \exp(x)) > 1$ (a exponencial é positiva)

3) $f''(x) = (1 - e^x)\exp(x - \exp(x)) \leq 0$, pois $e^x \leq 1$, quando $x \geq 0$.

As duas primeiras condições garantem existência e unicidade no intervalo, e sabemos que se $f(x_0)$ tiver o sinal negativo, como $f''(x) \leq 0$, então haverá convergência (pelo menos) quadrática do M. Newton. Isso acontece com $x_0 = 0$, pois $f(0) = -e^{-1} < 0$.

$\boxed{\textbf{2b)}_{[3.5]}}$i) Como $|g'(x)| = \exp(x - \exp(x))$, temos (exp é crescente)

$$\exp(x) \geq 1 + x \Rightarrow x - \exp(x) \leq -1 \Rightarrow \exp(x - \exp(x)) \leq \exp(-1) = L < 1$$

e a função g é contractiva (e invariante) em $\mathbb{R}$. Usamos o T. Ponto Fixo no espaço todo $\mathbb{R}$, que é fechado e convexo, garantindo a convergência do método do ponto fixo para qualquer iterada inicial.

Outra possibilidade é reparar que $0 < g(x) = \exp(-\exp(y_0)) < \exp(0) = 1$, e portanto $g(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$, podendo usar-se este intervalo.

ii) Já vimos que ambas as sucessões convergem para z, por isso somando e subtraindo z, devemos exigir

$$|x_n - y_n| \leq |x_n - z| + |z - y_n| \leq 10^{-6},$$

onde temos uma soma do erro absoluto do Método de Newton com o do Ponto Fixo. Pela fórmula de erro do método do ponto fixo (notar que $L = e^{-1}$, e vimos que $g(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$, logo $|y_2 - y_1| = |g(y_1) - g(y_0)| \leq 1$.)

$$|z - y_n| \leq \frac{L^{n-1}}{1 - L}|y_2 - y_1| \leq \frac{e^{1-n}}{1 - e^{-1}}.$$

Calculando duas iterações do Método de Newton (que converge muito mais rapidamente), temos

$$x_1 = \frac{e^{-1}}{1 + e^{-1}} = 0.268941.., x_2 = 0.269874.., f(x_2) = -1.86.. \times 10^{-7}$$

conclui-se pela estimativa elementar de erros (e porque $f'(x) > 1$) que estamos muito próximo da raiz,

$$|z - x_2| \leq \frac{|f(x_2)|}{\min |f'(x)|} \leq |f(x_2)| = 1.86.. \times 10^{-7}.$$

Portanto, como $|z - x_n|$ será mais pequeno que $|z - x_2|$, basta exigir

$$|z - x_n| + |z - y_n| \leq 1.86.. \times 10^{-7} + |z - y_n| \leq 10^{-6},$$

ou seja, $|z - y_n| \leq \frac{e^{1-n}}{1-e^{-1}} \leq 0.813 \times 10^{-6} \Rightarrow 1 - n \leq -14.6$, ou ainda $n \geq 15$.

iii) Temos $Z = G(Z) \Leftrightarrow (Z_1, Z_2) = (\exp(Z_2), -\exp(Z_1))$.

Isto implica $Z_1 = \exp(-\exp(Z_1))$ ou seja $Z_1 = g(Z_1)$, e como o ponto fixo de g é único, temos $Z_1 = z$.

Logo, também temos $Z_2 = -\exp(Z_1) = -e^z$.

Finalmente, $X^{(1)} = (e^0, -e^0) = (1, -1)$, e temos $X^{(2)} = (e^{-1}, -e)$.

$\boxed{\textbf{3a)}_{[2.5]}}$

Seja $q_3(x) = 1 - x^2 + x^3$.

(i) Se f é polinómio de grau 3, $f - q_3$ é também um polinómio de grau 3, que se anula em 4 raízes, logo essa diferença só pode ser nula, e $f = q_3$. Logo, o polinómio interpolador em quaisquer 4 nós tem pelo menos grau 3 e será o mesmo q_3.

(ii) Terá grau 4, e pela fórmula de Newton

$$p_4(x) = q_3(x) + f[-1, 0, 1, 2, 3](x + 1)x(x - 1)(x - 2),$$

porque, pelo enunciado, q_3 interpola f nos nós $-1, 0, 1, 2$ (i.e. a diferença é nula nesses pontos). Para além disso, o coeficiente de maior grau é $1 = f[-1, 0, 1, 2]$. Finalmente,

$$f[-1, 0, 1, 2, 3] = \frac{f[-1, 0, 1, 2] - f[0, 1, 2, 3]}{-1 - 3} = \frac{1 - 3}{-4} = \frac{1}{2},$$

$$\Rightarrow p_4(x) = 1 - x^2 + x^3 + \frac{1}{2}(x + 1)x(x - 1)(x - 2).$$

$\boxed{\textbf{3b)}_{[4.0]}}$ i) Consideramos $\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = x + 1, \phi_2(x) = \frac{1}{x+1}$,

$\langle\phi_0, \phi_0\rangle = \int_0^1 1dx = 1, \quad \langle\phi_0, \phi_1\rangle = \int_0^1 (x + 1)dx = \frac{3}{2}, \quad \langle\phi_0, \phi_2\rangle = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \log(2)$

$\langle\phi_1, \phi_1\rangle = \int_0^1 (x + 1)^2 dx = \frac{7}{3}, \quad \langle\phi_1, \phi_2\rangle = \int_0^1 (x + 1)\frac{1}{x+1}dx = 1, \quad \langle\phi_2, \phi_2\rangle = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{2}$.

$\langle\phi_0, f\rangle = \int_0^1 (x + 1)^{1/2}dx = \frac{2}{3}(2^{3/2} - 1) = 1.219..$,

$\langle\phi_1, f\rangle = \int_0^1 (x + 1)^{3/2}dx = \frac{2}{5}(2^{5/2} - 1) = 1.863..$,

$\langle\phi_2, f\rangle = \int_0^1 (x + 1)^{-1/2}dx = 2(2^{1/2} - 1) = 0.828..$

ii)

$$\begin{cases} a + \frac{3}{2}b + \log(2)c = \frac{2}{3}(2^{3/2} - 1) \\ \frac{3}{2}a + \frac{7}{3}b + c = \frac{2}{5}(2^{5/2} - 1) \\ \log(2)a + b + \frac{1}{2}c = 2(2^{1/2} - 1) \end{cases} \circlearrowleft \begin{cases} a_{n+1} = 1.219 - \frac{3}{2}b_n - \log(2)c_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{7}\left(1.863 - \frac{3}{2}a_{n+1} - c_n\right) \\ c_{n+1} = 2\left(0.828 - \log(2)a_{n+1} - b_{n+1}\right) \end{cases}$$

e portanto, $a_1 = 1.219, b_1 = \frac{3}{7}(1.863 - \frac{3}{2}1.219) = 0.0147, c_1 = 2\left(0.828 - \log(2)1.219 - 0.0147\right) = -0.0633$.

O Método de Gauss-Seidel converge porque a matriz do sistema normal é simétrica e definida positiva.

$\boxed{\textbf{4a)}_{[2.0]}}$ No cálculo pela R. Simpson composta sabemos que os "nós indexados pares" têm coeficiente $\frac{2h}{3}$ e os "ímpares" $\frac{4h}{3}$, e sendo $\frac{h}{3}$ nas extremidades ($h = 1$, aqui). Ao decalar o integral iremos mudar pares e ímpares, para efectuarmos a soma:

$\int_1^{2N+1} \frac{1}{x}dx \approx \frac{1}{3}(\frac{1}{1} + \frac{1}{2N+1}) + \frac{4}{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2N}) + \frac{2}{3}(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2N-1})$

$\int_2^{2N+2} \frac{1}{x}dx \approx \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2N+2}) + \frac{4}{3}(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2N+1}) + \frac{2}{3}(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2N})$

somando obtemos

$\int_1^{2N+1} \frac{1}{x}dx + \int_2^{2N+2} \frac{1}{x}dx \approx \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2N+1} + \frac{1}{2N+2}) + \frac{6}{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2N}) + \frac{6}{3}(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2N-1}) + \frac{4}{3}\frac{1}{2N+1} - \frac{2}{3}\frac{1}{2}$

e assim

$\log(2N + 1) + \log(2N + 2) - \log(2) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{2N+2}) + 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2N}) + \frac{4}{3}\frac{1}{2N+1} - \frac{1}{3}$

concluindo-se que

$2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2N}) \approx \log(2N + 1) + \log(2N + 2) - \log(2) - \frac{1}{3}\frac{1}{2N+2} - \frac{5}{3}\frac{1}{2N+1} + 2 - \frac{1}{6}$

ou ainda

$$\sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k} \approx \frac{1}{2}\log(2n^2+3n+1) + \frac{11}{12} - \frac{5}{12}\left(\frac{4n+3}{2n^2+3n+1}\right)$$

$\boxed{\mathbf{b)}_{[1.5]}}$ Para aplicar o Método de Taylor de 2^a ordem, consideramos

$$x''(t) = -x'(t)\log(2)\ 2^{-x(t)} = -\log(2)\ 2^{-2x(t)}$$

e portanto a iteração resume-se ao cálculo de x_2, sendo

$$x_{m+1} = x_m + 2^{-x_m}h + \frac{1}{2}(-\log(2)\ 2^{-2x_m})h^2 = x_m + 2^{-x_m} - \frac{\log(2)}{2}\ 2^{-2x_m}$$

ou seja, $x_1 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{\log(2)}{8} = 1.4134..$, $x_2 = 1.4134 + 2^{-1.4134} - \frac{\log(2)}{2}\ 4^{-1.4134} = 1.740..$