Análise Numérica (Exercícios)

Carlos J. S. Alves

Instituto Superior Técnico

Versão 0.1

(Dezembro de 2012 - compilação)

LMAC, MMA, MEIC

Conteúdo

1 Formulário Geral **4**
1.1 Interpolação de Lagrange . . . 4
1.2 Regularização e TFD . . . 4
1.3 Splines . . . 5
1.4 Interpolação de Hermite . . . 7
1.5 Diferenciação Numérica . . . 7
1.6 Aproximação de Funcionais Lineares . . . 8
1.7 Mínimos Quadrados e Polinómios Ortogonais . . . 8
1.8 Melhor Aproximação Uniforme . . . 9
1.9 Valores e Vectores Próprios . . . 9
1.10 Métodos para Equações Diferenciais Ordinárias . . . 11
1.11 Problemas de fronteira em EDO's . . . 13

2 Exercícios de 2010 **14**
2.1 Teste 1 - Enunciado (2010/11) . . . 14
2.2 Resolução - Teste 1 (2010/11) . . . 15
2.3 Exame 1 (2010/11) . . . 19
2.3.1 Primeira Parte . . . 19
2.3.2 Segunda Parte . . . 19
2.4 Resolução - Exame 1 (2010/11) . . . 21
2.4.1 Primeira Parte - resolução . . . 21
2.4.2 Segunda Parte - resolução . . . 23
2.5 Exame 2 (2010/11) . . . 27
2.5.1 Primeira Parte . . . 27
2.5.2 Segunda Parte . . . 28
2.6 Resolução - Exame 2 (2010/11) . . . 29
2.6.1 Primeira Parte - Resolução . . . 29
2.6.2 Segunda Parte - Resolução . . . 30

3 Exercícios (2011) **34**
3.1 Teste 1 (2011) . . . 34
3.1.1 Enunciado . . . 34
3.2 Resolução - Teste 1 (2011) . . . 35
3.3 Exame 1 (2011/12) . . . 40
3.3.1 Primeira Parte . . . 40
3.3.2 Segunda Parte . . . 40
3.3.3 Primeira Parte - Resolução . . . 42
3.3.4 Segunda Parte - Resolução . . . 44

4 Exercícios (2012) **48**
4.1 Teste 1 48
4.1.1 Enunciado 48
4.1.2 Resolução 48

1 Formulário Geral

1.1 Interpolação de Lagrange

- Sistema de Vandermonde generalizado

$$\begin{bmatrix} g_0(x_0) & \cdots & g_n(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0(x_n) & \cdots & g_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- Polimónios base de Lagrange

$$L_j(t) = \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{t - x_i}{x_j - x_i}$$

- Base de Newton

$$W_n(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

- Diferenças divididas e derivação

$$\exists \xi \in [x_0; ...; x_m] : f_{[x_0,...,x_m]} = \frac{1}{m!} f^{(m)}(\xi).$$

- Erro da Interpolação de Lagrange

$$\exists \xi \in [x_0; ...; x_n; z] : E(z) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(z - x_0) \cdots (z - x_n)$$

$$|E(z)| \leq \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{(n+1)!}|z - x_0| \cdots |z - x_n|,$$

1.2 Regularização e TFD

- Filtro regularizador

$$||\mu_\varepsilon||_{L^1(\mathbb{R})} = 1, \text{ em que } \mu \text{ é positiva e par, com suporte em } [-\varepsilon, \varepsilon].$$

$$\mu_\varepsilon^{[0]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & (|x| < \varepsilon) \\ 0, & (|x| \geq \varepsilon) \end{cases}$$

$$\mathbf{w}^{[0]} = \frac{1}{2E+1}(1, \overbrace{1, \cdots, 1}^{E\,vezes}, 0, \cdots, 0, \overbrace{1, \cdots, 1}^{E\,vezes})$$

$$\mu_\varepsilon^{[1]}(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon - |x|}{\varepsilon^2}, & (|x| < \varepsilon) \\ 0, & (|x| \geq \varepsilon) \end{cases}$$

- Produto de convolução

$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(y-x)dx$$

$$[\mathbf{v} * \mathbf{w}]_k = \sum_{j=0}^{N-1} v_j w_{k-j}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{2\pi i \frac{1}{N}} & \cdots & e^{2\pi i \frac{(N-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{2\pi i \frac{(N-1)}{N}} & \cdots & e^{2\pi i \frac{(N-1)^2}{N}} \end{bmatrix}$$

- Transformada de Fourier Discreta
- $$\begin{array}{llll} \mathcal{F}: & \mathbb{C}^N & \rightarrow & \mathbb{C}^N \\ & \mathbf{y} & \longmapsto \mathcal{F}\mathbf{y} = & \mathbf{W}^*\mathbf{y} = \left[\sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-\frac{2\pi i}{N}kj}\right]_k \end{array}$$

- Plancherel e Parseval

$$\frac{1}{N}\langle(\mathcal{F}\mathbf{y}), (\mathcal{F}\mathbf{z})\rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle\,; \qquad \frac{1}{\sqrt{N}}||\mathcal{F}\mathbf{y}||_2 = ||\mathbf{y}||_2$$

1.3 Splines

- Spline de Ordem r
  - (i) $s \in C^{r-1}[a, b]$,
  - (ii) $s_{|[x_{k-1}, x_k]} \in \mathbb{P}_r$, para $k = 1, ..., N$ (ou seja, s é um polinómio de grau r em cada sub-intervalo $[x_{k-1}, x_k]$.
- Spline linear - erro

$$||f - s||_\infty \leq \frac{||f''||_\infty}{8} h^2.$$

- Spline cúbico natural

$$\begin{bmatrix} \frac{h_0+h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{h_1}{6} & \frac{h_1+h_2}{3} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{h_{N-2}}{6} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{h_{N-2}}{6} & \frac{h_{N-2}+h_{N-1}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s''_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ s''_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{[x_1,x_2]} - f_{[x_0,x_1]} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{[x_{N-1},x_N]} - f_{[x_{N-2},x_{N-1}]} \end{bmatrix}$$

- Spline cúbico, com condições nas derivadas

$$\begin{bmatrix} \frac{h_0}{3} & \frac{h_0}{6} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{h_0}{6} & \frac{h_0+h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{h_{N-2}+h_{N-1}}{3} & \frac{h_{N-1}}{6} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{h_{N-1}}{6} & \frac{h_{N-1}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s''_0 \\ s''_1 \\ \vdots \\ s''_{N-1} \\ s''_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{[x_0,x_1]} - f'_0 \\ f_{[x_1,x_2]} - f_{[x_0,x_1]} \\ \vdots \\ f_{[x_{N-1},x_N]} - f_{[x_{N-2},x_{N-1}]} \\ f'_N - f_{[x_{N-1},x_N]} \end{bmatrix}$$

- Para $x \in [x_k, x_{k+1}]$ $_{(k=0,\ldots,N-1)}$:

$$s(x) = f_k + (x - x_k)s'_k + (x - x_k)^2 \frac{s''_k}{2} + (x - x_k)^3 \frac{s''[x_k, x_{k+1}]}{6}.$$

onde $s'_k = f[x_k, x_{k+1}] - \frac{h_k}{6}(2s''_k + s''_{k+1})$.

- Splines cúbicos

$$||g'' - s''||^2_{L^2[a,b]} = ||g''||^2_{L^2[a,b]} - ||s''||^2_{L^2[a,b]}$$

$$||f - s||_\infty \leq \frac{h^{3/2}}{2} ||f''||_{L^2[a,b]}$$

$$||f - s||_\infty \leq \frac{5h^4}{384} ||f^{(4)}||_\infty.$$

- B-splines cúbicos

$$B_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(2 - |x|)^3 - \frac{2}{3}(1 - |x|)^3 & \text{se } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{6}(2 - |x|)^3 & \text{se } 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & |x| \geq 2 \end{cases}$$

- B-splines quadráticos

$$B_2(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}\left((\frac{1}{2} - |x|)^2 + (\frac{1}{2} + |x|)^2\right) & \text{se } |x| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(\frac{3}{2} - |x|)^2 & \text{se } \frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{3}{2} \\ 0 & |x| \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

1.4 Interpolação de Hermite

- Sistema de Vandermonde - Hermite

$$\begin{bmatrix} g_0(x_0) & & g_N(x_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_0^{(\alpha_0)}(x_0) & & g_N^{(\alpha_0)}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0(x_m) & & g_N(x_m) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_0^{(\alpha_m)}(x_m) & & g_N^{(\alpha_m)}(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0^{(0)} \\ \vdots \\ y_0^{(\alpha_0)} \\ \vdots \\ y_m^{(0)} \\ \vdots \\ y_m^{(\alpha_m)} \end{bmatrix}$$

- Fórmula de Newton - Hermite

$$p_N(t) = \sum_{k=0}^{N} f_{[z_0,\ldots,z_k]}(t - z_0)\cdots(t - z_{k-1})$$

- Polinómios base de Hermite

$$\begin{aligned} H_k^0(x) &= (1 - 2L_k'(x_k)(x - x_k))\, L_k(x)^2 \\ H_k^1(x) &= (x - x_k)\, L_k(x)^2 \end{aligned}$$

- Erro de interpolação de Hermite

$$E(x) = f(x) - p_{m+|\alpha|}(x) = \frac{f^{(|\alpha|+m+1)}(\xi_x)}{(|\alpha| + m + 1)!} \prod_{k=0}^{m} (x - x_k)^{\alpha_k+1}$$

1.5 Diferenciação Numérica

- Diferenciação 1ª ordem

$$E_n'(x) = f'(x) - p_n'(x) = \frac{f^{(n+2)}(\xi_2)}{(n+2)!} W_{n+1}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!} W_{n+1}'(x)$$

- Diferenças progressivas 1ª ordem

$$f'(z) = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \frac{f'''(\xi)}{2} h.$$

- Diferenças centradas 1ª ordem

$$f'(z) = \frac{f(z+h) - f(z-h)}{2h} - \frac{f'''(\xi)}{6} h^2.$$

- Diferenciação 2ª ordem

$$E''(x) = \frac{f^{(n+3)}(\xi_3)}{(n+3)!}W_{n+1}(x) + 2\frac{f^{(n+2)}(\xi_2)}{(n+2)!}W'_{n+1}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}W''_{n+1}(x)$$

- Diferenças centradas 2ª ordem

$$f''(z) = \frac{f(z+h) - 2f(z) + f(z-h)}{h^2} - \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{12}h^2$$

- Diferenças progressivas e Diferenças divididas

$$f_{[x_0,\ldots,x_k]} = \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}$$

- Soma por partes

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \Delta v_k = [u_k v_k]_{k=0}^{k=n} - \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1}\Delta u_k$$

1.6 Aproximação de Funcionais Lineares

- Aproximação genérica de $F(g)$

$$\tilde{F}(g) = \alpha_0 g(z_0) + \cdots + \alpha_m g(z_m) = (\alpha_0\delta_{z_0} + \cdots + \alpha_m\delta_{z_m})g.$$

- Erro $F(g) - \tilde{F}(g) = F(\varepsilon_n)$, com $\varepsilon_n = g - p_n$, onde $\tilde{F}$ tem grau $n \geq m$.

1.7 Mínimos Quadrados e Polinómios Ortogonais

- Caso Discreto, produto interno $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{Q}} = \mathbf{u}^*\mathbf{Q}\mathbf{v}$ com $V_{ij} = \varphi_j(x_i)$,

$$\mathbf{V}^*\mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{a} = \mathbf{V}^*\mathbf{Q}\mathbf{f}$$

- Polinómios ortogonais com $\langle u, v \rangle_w = \int_a^b w(t)\bar{u}(t)v(t)dt$

$$q_{k+1}(x) = xq_k(x) - \langle \hat{q}_k, tq_k \rangle_w \hat{q}_k(x) - \frac{||q_k||_w^2}{||q_{k-1}||_w^2}q_{k-1}(x)$$

$$q_{k+1}(x) = xq_k(x) - \frac{||q_k||_w^2}{||q_{k-1}||_w^2}q_{k-1}(x) \quad (\text{se } q_0 = 1, q_1 = x,\ w \text{ par}, (a,b) = (-b,b))$$

- Polinómios de Legendre (em$[-1,1], w=1$), $P_0 = 1, P_1 = x$

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \frac{n^2}{4n^2-1}P_{n-1}(x)$$

- Polinómios de Chebyshev (em$(-1,1), w = (1-x^2)^{-1/2}$, $T_0 = 1, T_1 = x$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad \text{mónicos: } \tilde{T}_n = \frac{T_n}{2^{n-1}}$$

- Fórmulas de integração de Gauss, com $I_w(f) = \langle 1, f \rangle_w = \int_a^b w(x)f(x)dx$, tem grau $2n-1$

$$Q_w(f) = I_w(L_1)f(z_1) + \cdots + I_w(L_n)f(z_n)$$

1.8 Melhor Aproximação Uniforme

- Equioscilação de Chebyshev

$$(f - p_n)(x_k) = \pm(-1)^k ||f - p_n||_\infty$$

- Algoritmo de Remes, dado $X = \{x_0, \ldots, x_{n+1}\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n & (-1)^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^n & (-1)^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_{n+1}) \end{bmatrix}$$

  ver extremos de $r(x) = f(x) - p_n(x)$ com $p_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$.

- Erro de interpolação com nós de Chebyshev

$$||f - p_n||_\infty \leq \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{(n+1)!} ||\tilde{T}_{n+1}|| = \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{2^n (n+1)!}$$

1.9 Valores e Vectores Próprios

- Teorema de Gershgorin. Há m valores próprios na componente conexa de m bolas,

$$\lambda \in \bigcup_{k=1}^{N} \bar{B}(a_{kk}, r_k), \quad \text{com } r_k = \sum_{j=1, j \neq i}^{N} |a_{kj}|$$

- Método das Potências

$$\begin{cases} u^{(0)} : ||u^{(0)}|| = 1, \\ u^{(n+1)} = \sigma_n \frac{Au^{(n)}}{||Au^{(n)}||}, \end{cases}$$

com erro $|\lambda_1 - \lambda^{(n)}| \leq C \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^n$.

- Método das Iterações Inversas

$$x^{(n+1)} = \sigma_n \frac{(A - \lambda I)^{-1} x^{(n)}}{||(A - \lambda I)^{-1} x^{(n)}||_\infty}$$

- Método QR

$$A_n = Q_n R_n, \quad A_{n+1} = R_n Q_n$$

- Método QR com deslocamento

$$\begin{gathered} A_n - \alpha_n I = Q_n R_n, \\ A_{n+1} = R_n Q_n + \alpha_n I \end{gathered}$$

- Condicionamento (Teorema de Bauer-Fike)

$$\forall j \, \exists i : |\lambda_i - \tilde{\lambda}_j| \leq \text{cond}_\infty(P) ||A - \tilde{A}||_\infty$$

- sendo hermitiana $\forall j \, \exists i : |\lambda_i - \tilde{\lambda}_j| \leq ||A - \tilde{A}||_2$.

- Matriz Companheira

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{N-2} & -a_{N-1} \end{bmatrix}$$

1.10 Métodos para Equações Diferenciais Ordinárias

- Resumo de métodos

Nome do Método	**Expressão**	**Ordem**
Euler	$y_{k+1} = y_k + hf_k$	1
Euler Implícito	$y_{k+1} = y_k + hf_{k+1}$	1
RK2-Ponto-Médio	$y_{k+1} = y_k + h\, f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f_k)$	2
RK2-Heun	$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(\, f_k + f(t_k + h, y_k + hf_k)\,)$	2
Trapézios (implícito)	$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(\, f_k + f_{k+1}\,)$	2
Leapfrog (explícito)	$y_{k+1} = y_{k-1} + 2hf_k$	2
BDF-2 (implícito)	$y_{k+1} = \frac{4}{3}y_k - \frac{1}{3}y_{k-1} + \frac{2h}{3}f_{k+1}$	2
Adams-Bashforth (passo 2)	$y_{k+1} = y_k + \frac{3h}{2}f_k - \frac{h}{2}f_{k-1}$	2
Adams-Moulton (passo 2)	$y_{k+1} = y_k + \frac{5h}{12}f_{k+1} + \frac{2h}{3}f_k - \frac{h}{12}f_{k-1}$	3
Adams-Bashforth (passo 3)	$y_{k+1} = y_k + \frac{23h}{12}f_k - \frac{4h}{3}f_{k-1} + \frac{5h}{12}f_{k-2}$	3
RK-3	$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(\, F_1 + 4F_2 + F_3)\,) \\ F_1 = f_k;\ F_2 = hf(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_1) \\ F_3 = f(t_k + h, y_k - hF_1 + 2hF_2) \end{cases}$	3
Adams-Moulton (passo 3)	$y_{k+1} = y_k + \frac{3h}{8}f_{k+1} + \frac{19h}{24}f_k - \frac{5h}{24}f_{k-1} + \frac{h}{24}f_{k-2}$	4
Adams-Bashforth (passo 4)	$y_{k+1} = y_k + \frac{55h}{24}f_k - \frac{59h}{24}f_{k-1} + \frac{37h}{24}f_{k-2} - \frac{3h}{8}f_{k-3}$	4
RK-4	$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(\, F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)\,) \\ F_1 = f_k;\ F_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_1) \\ F_3 = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_2) \\ F_4 = f(t_k + h, y_k + hF_3) \end{cases}$	4
etc...		

- Sistemas EDO's

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

- Métodos de Runge-Kutta

$$y_{k+1} = y_k + h(\beta_1 F_1 + \ldots + \beta_m F_m),$$

$$F_m = f(t_k + \tau_m h,\, y_k + \alpha_{m1} h F_1 + \cdots + \alpha_{m,m-1} h F_{m-1})$$

- Tabelas de Butcher

$$\begin{array}{c|cccc} \tau_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \tau_2 & \alpha_{2,1} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \tau_m & \alpha_{m,1} & \cdots & \alpha_{m,1} & 0 \\ \hline & \beta_1 & \cdots & \beta_{m-1} & \beta_m \end{array}$$

- Métodos Unipasso

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k),$$

- Convergência de Ordem r

$$E_n = y(t_n) - y_n = O(h^r)$$

- Consistência de Ordem r

$$\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - \Phi(t_k, y(t_k)) = O(h^r)$$

- Métodos Implícitos

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k, y_{k+1})$$

- A-estabilidade

$$\mathcal{A}_{\mathcal{M}} = \{\alpha \in \mathbb{C} : \quad \sup_n (y_n^\alpha) < \infty\},$$

onde (y_n^α) é resulta do método $\mathcal{M}$ aplicado a $y'(t) = \alpha y(t)$, com $h = 1$, $y_0 = 1$.

- Métodos Preditor-Corrector

$$\begin{cases} x_0 = y_k + h\Phi_P(t_k, y_k) \\ x_{m+1} = y_k + h\Phi_C(t_k, y_k, x_m) \end{cases}$$

- Métodos Multipasso

$$y_{k+1} = \sum_{m=0}^{p-1} \alpha_{-m} y_{k-m} + h\Phi(t_k, y_k, \cdots, y_{k-p+1})$$

- Consistência nos métodos multipasso

$$\frac{1}{h}\left(y(t_{k+1}) - \sum_{m=0}^{p-1} \alpha_{-m} y(t_{k-m})\right) - \Phi(t_k, y(t_{k+1}), y(t_k), \ldots, y(t_{k-p+1})) = O(h^r),$$

- Estabilidade dos métodos multipasso - polinómio característico

$$r^p = \alpha_0 r^{p-1} + \ldots + \alpha_{-p+1}$$

Estável: raízes $|r_j| \leq 1$ e, sendo múltiplas $|r_j| < 1$.

1.11 Problemas de fronteira em EDO's

- Método do tiro (problema de 2ª ordem)

$$\begin{cases} y_x''(t) = g(t, y_x(t), y_x'(t)), \\ y_x(a) = y_a\,, \quad y_x'(a) = x. \end{cases}$$

sendo $\phi(x) = y_x(b)$, resolver $\phi(x) = y_b$.

- Diferenças finitas (aproximação de 2ª ordem)

$$\begin{aligned} \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} &= g\left(t_k, y_k, \tfrac{y(t_{k+1}) - y(t_{k-1})}{2h}\right), \text{ para } k = 1, \ldots, n-1 \\ &\quad \text{com } y_0 = y(t_0) = y_a,\ y_n = y(t_n) = y_b. \end{aligned}$$

2 Exercícios de 2010

2.1 Teste 1 - Enunciado (2010/11)

Com $c > 0$, considere no intervalo $[-1, 1]$ a função

$$g_c(x) = \frac{1}{1 + |x|^c}.$$

1)$_{[3.0]}$ Determine dois polinómios p_n interpoladores de g_c em $\{-1, 0, 1\}$,
a) tal que $p_n'(0) = 0$.
b) tal que p_n seja de grau $n \leq 3$ e verifique $p_n''(-1) = 0$.

2)$_{[2.0]}$ Explicite o spline cúbico natural, interpolador de g_c em $\{-1, 0, 1\}$.

3)$_{[2.0]}$ Considere $\tilde{g}(x) = g_c(x) + 1000\, x^3 g_c(x)$.
a) Mostre que $(\tilde{g} * \mu_\varepsilon^{[1]})(0) = g_c(\xi)$, com $\xi \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.
b) Mostre que $\langle g_c - \tilde{g}, T_{2k} \rangle_{L^2(-1,1)} = 0$, onde T_n são polinómios de Chebyshev.

4)$_{[2.0]}$ Usando o ponto $x = \sqrt{2} - 1$, e dois outros, determine

$$d = \min_{a,b \in \mathbb{R}} \max_{x \in [0,1]} \left| a + bx - \frac{1}{1+x} \right|.$$

5)$_{[1.0]}$ Mostre que $[\mathcal{F}(\mathrm{d}^p v_n)]_k = i^p \sin^p(\frac{2\pi k}{N})[\mathcal{F}(v_n)]_k$, onde $\mathrm{d}v_n = \frac{1}{2}(v_{n+1} - v_{n-1})$.

2.2 Resolução - Teste 1 (2010/11)

1a) Em qualquer caso de $c > 0$, temos:

x	-1		0		0		1
g_c	$\frac{1}{2}$		1		1		$\frac{1}{2}$
$g[,]$		$\frac{1}{2}$		0		$\frac{-1}{2}$	
$g[,,]$			$\frac{-1}{2}$		$\frac{-1}{2}$		
$g[,,,]$				0			

Portanto pela F. Newton generalizada, $p_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}x(x+1) = 1 - \frac{1}{2}x^2$.

1b) Em qualquer caso de $c > 0$, temos:

x	-1		-1		-1		0		1
g_c	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{1}{2}$
$g[,]$		A		A		$\frac{1}{2}$		$\frac{-1}{2}$	
$g[,,]$			0		$\frac{1}{2} - A$		$\frac{-1}{2}$		
$g[,,,]$				$\frac{1}{2} - A$		$\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}A$			
$g[,,,,]$					$(*) = 0$				

(*) O polinómio fica de grau 3, se a última diferença for zero, ou seja se

$$\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}A = \frac{1}{2} - A \Leftrightarrow A = \frac{2}{3},$$

logo pela F. Newton generalizada

$$p_3(x) = \frac{1}{2} + A(x+1) + 0(x+1)^2 + (\frac{1}{2} - A)(x+1)^3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}(x+1) - \frac{1}{6}(x+1)^3.$$

2) Neste caso há apenas dois subintervalos $[x_0, x_1] = [-1, 0]$, $[x_1, x_2] = [0, 1]$, com $h_k = 1$. Como se trata de um spline natural, $s_0'' = s_2'' = 0$, e calculamos apenas s_1'' (o sistema é 1×1) :

$$\frac{2}{3}s_1'' = g_c[0,1] - g_c[-1,0] = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow s_1'' = -\frac{3}{2},$$

- quando $x \in [-1, 0]$:

$$\begin{aligned} s_0' = g_c[-1,0] - \tfrac{1}{6}(2s_0'' + s_1'') &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}(0 - \tfrac{3}{2}) = \tfrac{3}{4} \\ s(x) = \tfrac{1}{2} + (x+1)s_0' + \tfrac{1}{2}(x+1)^2 s_0'' + \tfrac{1}{6}(x+1)^3 s_{[-1,0]}'' &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}(x+1) - \frac{1}{4}(x+1)^3 \end{aligned}$$

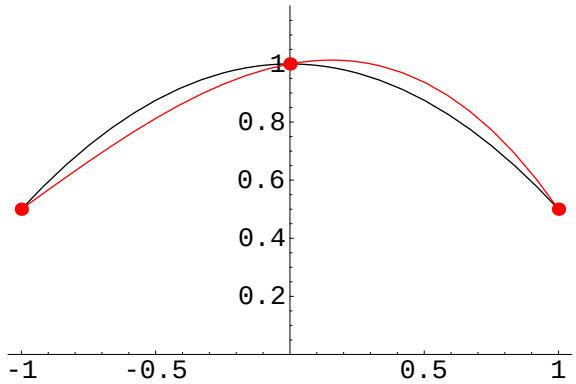

Figura 1: Solução de 1a) (a preto), e de 1b) (a vermelho).

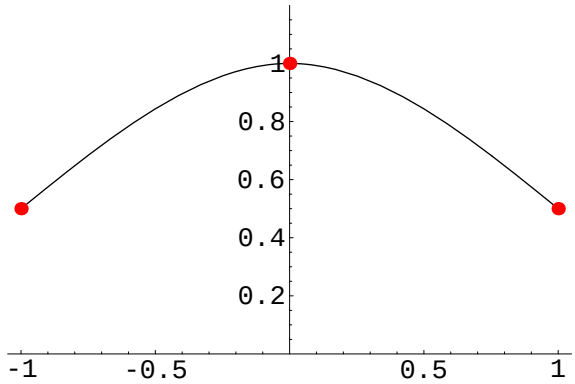

Figura 2: Spline natural que é solução do Exercício 2.

- quando $x \in [0,1]$: (será "igual", porque a função é par)

$$\begin{aligned} s_1' = g_c[0,1] - \tfrac{1}{6}(2s_1'' + s_2'') &= -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}(-2\tfrac{3}{2} + 0) = 0 \\ s(x) = 1 + xs_1' + \tfrac{1}{2}x^2 s_1'' + \tfrac{1}{6}x^3 s_{[0,1]}'' &= 1 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3 \end{aligned}$$

3a) Notando que o integral de uma função ímpar em $(-\varepsilon, \varepsilon)$ é zero,

$$\begin{aligned} (\tilde{g} * \mu_\varepsilon^{[1]})(0) &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(x)\mu_\varepsilon^{[1]}(0-x)dx \\ &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_c(x)\mu_\varepsilon^{[1]}(x)dx + 1000 \overbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \underbrace{x^3}_{impar} \underbrace{g_c(x)}_{par} \underbrace{\mu_\varepsilon^{[1]}(x)}_{par} dx}^{=0}. \end{aligned}$$

Pelo teorema do valor intermédio para integrais, existe $\xi \in (-\varepsilon, \varepsilon)$:

$$(\tilde{g} * \mu_\varepsilon^{[1]})(0) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_c(x) \underbrace{\mu_\varepsilon^{[1]}(x)}_{\geq 0} dx = g_c(\xi) \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mu_\varepsilon^{[1]}(x) dx}_{=1=||\mu_\varepsilon^{[1]}||_{L^1}} = g_c(\xi).$$

3b) Mostramos que T_{2k} é sempre par e T_{2k+1} é sempre ímpar, por indução.

Claramente,$T_0 = 1$ é par e $T_1(x) = x$ é ímpar. Assumindo que T_{2k-1} é ímpar, T_{2k} é par, obtemos:

$$T_{2k+1}(x) = \underbrace{2x}_{impar} \underbrace{T_{2k}(x)}_{par} - \underbrace{T_{2k-1}(x)}_{impar} \text{ é ímpar;}$$
$$T_{2k+2}(x) = \underbrace{2x}_{impar} \underbrace{T_{2k+1}(x)}_{impar} - \underbrace{T_{2k}(x)}_{par} \text{ é par;}$$

confirmando a tese. Assim T_{2k} são sempre pares, logo

$$\langle g_c - \tilde{g}, T_{2k} \rangle_{L^2(-1,1)} = -1000 \int_{-1}^{1} \underbrace{x^3}_{impar} \underbrace{g_c(x)}_{par} \underbrace{T_{2k}(x)}_{par} dx = 0.$$

4) Trata-se de encontrar a melhor aproximação $p_1(x) = a + bx$ relativamente a $g_1(x) = (1+x)^{-1}$. Com $n = 1$, consideramos os $n + 2 = 3$ pontos $\{0,\ z = \sqrt{2} - 1,\ 1\}$, para verificar a equioscilação

$$\begin{cases} d = g_1(0) - p_1(0) = 1 - a \Rightarrow a = 1 - d \\ -d = g_1(\sqrt{2} - 1) - p_1(\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} - a - b(\sqrt{2} - 1) \\ d = g_1(1) - p_1(1) = \frac{1}{2} - a - b \Rightarrow b = \frac{1}{2} - a - d = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

logo $-d = \frac{1}{\sqrt{2}} - (1 - d) + \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow -2d = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2} + \sqrt{2} \Rightarrow d = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}$ verifica-se uma equioscilação, com

$$d = ||p_1 - g_1||_\infty = \tfrac{3}{4} - \tfrac{\sqrt{2}}{2} = 0.04289...,$$

pois $0 = (p_1 - g_1)'(x) = b + \frac{1}{(1+x)^2} \Leftrightarrow (1+x)^2 = \frac{1}{-b} = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} - 1 = z \in [0, 1]$, regressando os pontos $\{0, z, 1\}$ já verificados (condição final do algoritmo de Remes). O Teorema de Chebyshev garante assim a melhor aproximação minimax.

5) Provamos por indução em p (para $p = 0$ é uma identidade trivial).

Temos para qualquer sucessão (v_n), o caso $p = 1$, ou seja$[\mathcal{F}(\mathrm{d}v_n)]_k = i \sin(\frac{2\pi k}{N})[\mathcal{F}(v_n)]_k$

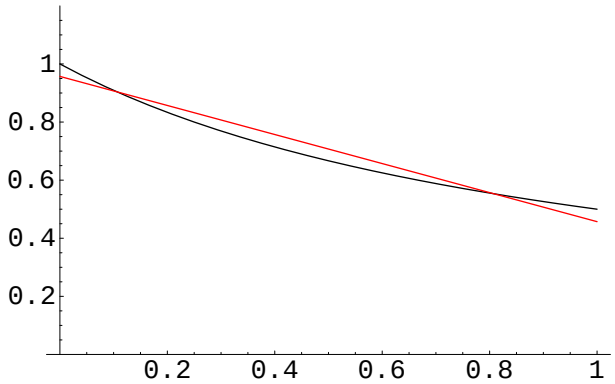

Figura 3: Solução (recta vermelha) $p_1(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}x$, do Exercício 4.

porque:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{F}(\tfrac{1}{2}(v_{n+1} - v_{n-1}))]_k &= \sum_{j=0}^{N-1} \tfrac{1}{2}(v_{j+1} - v_{j-1}) e^{-\frac{2\pi i}{N}kj} \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1} v_{j+1} e^{-\frac{2\pi i}{N}kj} - \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1} v_{j-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}kj} \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{m=0}^{N-1} v_m e^{-\frac{2\pi i}{N}k(m-1)} - \tfrac{1}{2}\sum_{m=0}^{N-1} v_m e^{-\frac{2\pi i}{N}k(m+1)} \\
&= \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{2\pi i}{N}k} - e^{-\frac{2\pi i}{N}k}\right)\sum_{m=0}^{N-1} v_m e^{-\frac{2\pi i}{N}km} \\
&= \tfrac{1}{2} 2i \sin(\tfrac{2\pi}{N}k)[\mathcal{F}(v_n)]_k
\end{aligned}$$

Aplicando este resultado à sucessão $(\mathrm{d}^p v_n)$, temos

$$[\mathcal{F}(\mathrm{d}^{p+1} v_n)]_k = [\mathcal{F}(\mathrm{d}(\mathrm{d}^p v_n))]_k = i\ \sin(\tfrac{2\pi}{N}k)[\mathcal{F}(\mathrm{d}^p v_n))]_k$$

e por hipótese de indução $\mathcal{F}(\mathrm{d}^p v_n) = i^p \sin^p(\frac{2\pi k}{N})[\mathcal{F}(v_n))]_k$, portanto verifica-se a tese

$$[\mathcal{F}(\mathrm{d}^{p+1} v_n)]_k = i\ \sin(\frac{2\pi k}{N})\, i^p \sin^p(\frac{2\pi k}{N})[\mathcal{F}(v_n))]_k = i^{p+1} \sin^{p+1}(\frac{2\pi k}{N})[\mathcal{F}(v_n))]_k.$$

2.3 Exame 1 (2010/11)

2.3.1 Primeira Parte

1.1)$_{[3.0]}$ Seja $f(x) = e^x$.

a) Determine um p_n polinómio interpolador de f nos nós $\{0, 1\}$, tal que p_n' e p_n'' são interpoladores de f' e f''(respect.) e também em $\{0, 1\}$.

b) Apresente uma estimativa para o majorante do erro de interpolação $||f - p_n||_\infty$ no intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

1.2)$_{[2.5]}$ Considere os pontos $\mathbf{a} = (0, 0, 0), \mathbf{b} = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$, e sejam S_1, S_2, S_3 splines cúbicos naturais em $[0, 1]$. Explicite a curva $(S_1(t), S_2(t), S_3(t))$ que interpola o ponto $\mathbf{a}$ quando $t = 0$, $\mathbf{b}$ quando $t = \frac{1}{2}$, $\mathbf{c}$ quando $t = 1$.

1.3)$_{[1.0]}$ Com $a \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}$, calcule o interpolador trigonométrico $\phi :\ \phi(k\pi) = 0, \phi(\frac{\pi}{2} + k\pi) = a$.

1.4)$_{[2.5]}$ Determine uma fórmula de derivação numérica, para $f'(z)$, usando os valores $f(z - 2h), f(z - h), f(z + h), f(z + 2h)$, com $h > 0$, de forma a ter erro $O(h^p)$, com o maior p possível. Explicite a expressão do erro.

1.5)$_{[1.0]}$ Justifique se o polinómio $p_2(x) = x^2 + \frac{1}{2}$ é, ou não, a melhor aproximação uniforme em $\mathbb{P}_2$ de $f(x) = x^3 - x + 1$ no intervalo $[-2, 2]$.

2.3.2 Segunda Parte

2.1)$_{[4.0]}$ Com $a, b, c \in \mathbb{R}$, considere a matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} a^2 & \sin^2(c) & 0 \\ \sin^2(b) & 2a & \cos^2(b) \\ 0 & \cos^2(c) & a \end{bmatrix}$$

a) Para $a < -2$, mostre que os valores próprios de A são reais, localize os intervalos disjuntos, e comente a invertibilidade.

b) Com $a \neq 0, b = 0$ aplique o método das potências, com $u^{(0)} = (1, 0, 0)$. Comente os resultados.

c) Com $a = -\sqrt{6}, b = c = 0$, aplique uma iterada do método QR (usando Gram-Schmidt), e apresente as aproximações dos valores e vectores próprios.

2.2)$_{[4.5]}$Considere o problema de Cauchy $u'(t) = f(u(t))$, com $u(0) = 0$, com f Lipschtiziana.

a) Dado um passo $h > 0$, e $u_0 = 0$, considere o método numérico $u_{n+1} = (1 + h^p)u_n + hf(u_n)$. Discuta a convergência do método em função do expoente $p \in \mathbb{Z}$.

b) Em função de $\alpha \in \mathbb{R}$, discuta a estabilidade de um método de passo duplo:

$$u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha)u_{n-1} + hf(u_n).$$

c) Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $f'(x) \in [\frac{-1}{\varepsilon}, -\varepsilon]$ com $\varepsilon \in [0,1]$.

Mostre que para $h > 0$ fixo e suficientemente pequeno, a sucessão (u_n) definida pelo método de Euler converge, $u_n \to z$, verificando-se $f(z) = 0$.

2.3)$_{[1.5]}$Considere a equação diferencial de segunda ordem no intervalo $[0,1]$,

$$u''(t) + \frac{u'(t) - u(t)}{1+t} = f(t)$$

Sendo $u(0) = u(1) = 1$, com $h = \frac{1}{4}$, apresente o sistema linear, resultante de uma aproximação de 2ª ordem por diferenças finitas, para a resolução deste problema de valores na fronteira.

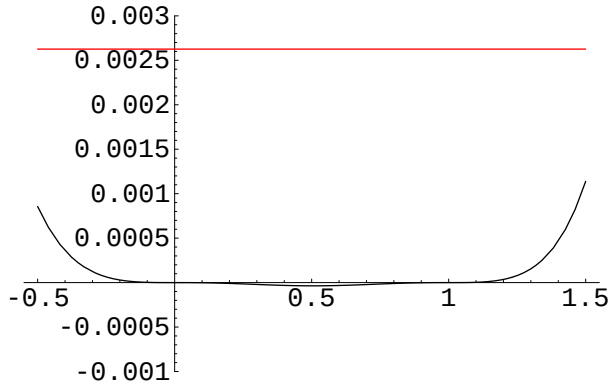

Figura 4: Erro de interpolação (preto), e valor da estimativa (linha vermelha).

2.4 Resolução - Exame 1 (2010/11)

2.4.1 Primeira Parte - resolução

1.1.a) Notamos que $f[x,x] = f'(x) = e^x = f''(x) = 2f[x,x,x]$, portanto:

x	0		0		0		1		1		1
f	1		1		1		e		e		e
$f[,]$		1		1		$e-1$		e		e	
$f[,,]$			$\frac{1}{2}$		$e-2$		1		$\frac{e}{2}$		
$f[,,,]$				$e-\frac{5}{2}$		$3-e$		$\frac{e}{2}-1$			
$f[,,,,]$					$\frac{11}{2}-2e$		$\frac{3}{2}e-4$				
$f[,,,,,]$						$\frac{7}{2}e-\frac{19}{2}$					

logo pela F. Newton generalizada

$$p_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + (e - \frac{5}{2})x^3 + (\frac{11}{2} - 2e)x^3(x-1) + (\frac{7}{2}e - \frac{19}{2})x^3(x-1)^2.$$

1.1.b) A fórmula do erro dá-nos $f(x) - p_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi_x)}{6!}x^3(x-1)^3$, logo

$$||f - p_5||_\infty = \max_{x\in[-0.5,1.5]} \frac{e^{1.5}}{6!}|x(x-1)|^3 \leq \frac{e^{1.5}}{720}(\frac{3}{4})^3 = 0.0026...$$

1.2) Os pontos $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, são unidos por splines que verifiquem:

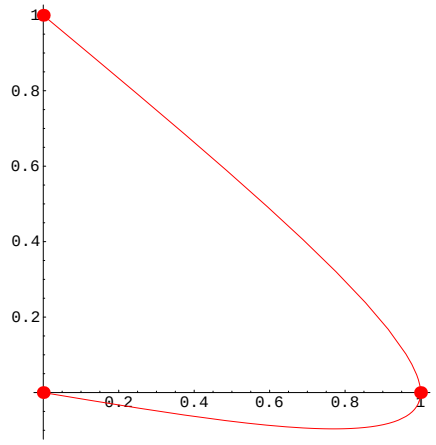

Figura 5: Solução do exercício 2

x	0		$\frac{1}{2}$		1
S_1	0		0		0
S_2	0		1		0
S_3	0		0		1

é claro que $S_1 \equiv 0$, faltando apenas calcular S_2 e S_3. Acerca de S_2 obtemos, com $h = \frac{1}{2}$

$$\frac{2h}{3} s_1'' = S_2[\tfrac{1}{2},1] - S_2[0,\tfrac{1}{2}] = -4 \Leftrightarrow s_1'' = -12$$

e daqui $s_1' = 0, s_0' = 3$, obtendo

$$S_2(x) = \begin{cases} 3x - 4x^3, & (x \in [0, \frac{1}{2}]) \\ 1 - 6(x - \frac{1}{2})^2 + 4(x - \frac{1}{2})^3 & (x \in [\frac{1}{2}, 1]) \end{cases}$$

e de forma semelhante, para S_3, obtemos $s_1'' = 6$, depois $s_1' = 1, s_0' = -\frac{1}{2}$,

$$S_3(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 2x^3, & (x \in [0, \frac{1}{2}]) \\ (x - \frac{1}{2}) + 3(x - \frac{1}{2})^2 - 2(x - \frac{1}{2})^3 & (x \in [\frac{1}{2}, 1]) \end{cases}$$

1.3) Basta reparar que $\phi(0) = 0, \phi(\frac{\pi}{2}) = a, \phi(\pi) = 0, \phi(\frac{3\pi}{2}) = a$, repetindo-se periodicamente. Basta calcular os coeficientes para as funções base $u_k(t) = e^{ikt}$

$$\frac{1}{N}\mathbf{W}^*\mathbf{y} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a/2 \\ 0 \\ -a/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtendo-se $\phi(t) = Re(\frac{a}{2} + 0 - \frac{a}{2}e^{2it} + 0) = \frac{a}{2}(1 - \cos(2t))$.

1.4) Os nós são $x_0 = z - 2h$, $x_1 = z - h$, $x_2 = z + h$, $x_3 = z + 2h$, logo $W_3(x) = (x - x_0)...(x - x_3)$ implica

$$\begin{aligned} W_3(z) &= (-2h)(-h)(h)(2h) = 4h^4, \\ W_3'(z) &= (-2h)(-h)(h) + (-2h)(-h)(2h) + (-2h)(h)(2h) + (-h)(h)(2h) = 0, \end{aligned}$$

e pela fórmula de erro, $f'(z) - p_3'(z) = \frac{f^{(5)}(\xi_2)}{5!}4h^4$, ou seja conseguimos um erro $O(h^4)$ usando a interpolação que anula $W_3'(z)$. Essa interpolação pode ser expressa pela fórmula de Newton

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f[z-2h] + f[z-2h, z-h](x - z - 2h) \\ &\quad + f[z-2h, z-h, z+h](x - z + 2h)(x - z + h) \\ &\quad + f[z-2h, z-h, z+h, z+2h](x - z + 2h)(x - z + h)(x - z - h) \end{aligned}$$

de onde a fórmula de aproximação é dada por

$$f'(z) \approx p_3'(z) = f[z-2h, z-h] + f[z-2h, z-h, z+h](3h) + f[z-2h, z-h, z+h, z+2h](-h^2)$$

Simplificando $p_3'(z) = (14f[z-h, z+h] - f[z-2h, z-h] - f[z+h, z+2h])/12$, obtemos

$$f'(z) = \frac{f(z-2h) - 8f(z-h) + 8f(z+h) - f(z+2h)}{12h} + \frac{f^{(5)}(\xi_2)}{30}h^4$$

1.5) Para verificar se $p_2(x) = x^2 + \frac{1}{2}$ é a melhor aproximação $\mathbb{P}_2$ relativamente a $f(x) = x^3 - x + 1$ em $[-2, 2]$, usamos o Teorema de Chebyshev. O p_2 deve verificar uma equioscilação em 4 pontos do intervalo:

$$r(x_k) = f(x_k) - p_2(x_k) = (-1)^k ||f - p_2||_\infty$$

Ora, como $||f - p_2||_\infty = \max |x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2}|$ vemos que $r(x) = x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2}$ verifica $r'(z) = 3z^2 - 2z - 1 = 0$ se $z = 1$ ou $z = -\frac{1}{3}$, e estes são os extremos internos, com $r(1) = -\frac{1}{2}$ e $r(-\frac{1}{3}) = \frac{37}{54}$, tendo nos extremos do intervalo $r(-2) = -\frac{19}{2}, r(2) = \frac{5}{2}$, concluímos que $||r||_\infty = \frac{19}{2} > |r(x)|$ se $x \in]-2, 2]$, e não há 4 pontos $x_k \in [-2, 2]$ que satisfaçam a equioscilação. Portanto, não se trata da melhor aproximação uniforme.

2.4.2 Segunda Parte - resolução

2.1a) As bolas definidas pelo T. Gerschgorin (linhas, colunas é semelhante) são

$$\begin{aligned} \bar{B}(a^2, \sin^2(c)) &\subseteq \bar{B}(a^2, 1) \\ \bar{B}(2a, \sin^2(b) + \cos^2(b)) &= \bar{B}(2a, 1) \\ \bar{B}(a^2, \cos^2(c)) &\subseteq \bar{B}(a, 1) \end{aligned}$$

como $a < -2 \Rightarrow a^2 > 4$ temos $\bar{B}(a^2, 1)$ com parte real positiva, não intersectando $\bar{B}(a, 1), \bar{B}(2a, 1)$ que têm parte real negativa. Estas duas bolas também não se intersectam porque

$$|z - a| \leq 1 \wedge |z - 2a| \leq 1 \quad \text{implica} \quad |z_1 - a| \leq 1 \wedge |z_1 - 2a| \leq 1,$$

logo

$$z_1 - 2a \leq 1 \ \wedge -1 \leq z_1 - a \Rightarrow a - 1 \leq z_1 \leq 1 + 2a \Rightarrow a - 1 \leq 1 + 2a \Rightarrow -2 \leq a,$$

o que é falso por hipótese. Assim, sendo as 3 bolas disjuntas, cada bola terá um valor próprio, que terá que ser real (a matriz tem entradas reais). Temos assim valores próprios

$$\lambda_1 \in [2a - 1, 2a + 1], \lambda_2 \in [a - 1, a + 1], \lambda_3 \in [a^2 - 1, a^2 + 1].$$

Como nenhum dos intervalos contém a origem, não há valores próprios nulos e a matriz é invertível.

2.1b) A primeira iterada do método das potências dá

$$\begin{aligned} v^{(1)} &= Au^{(0)} = \begin{bmatrix} a^2 & \sin^2(c) & 0 \\ 0 & 2a & 1 \\ 0 & \cos^2(c) & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ u^{(1)} &= \frac{v^{(1)}}{||v^{(1)}||_\infty} = \frac{v^{(1)}}{a^2} = u^{(0)}, \end{aligned}$$

concluímos que $u^{(n)} = u^{(0)} = (1, 0, 0)$, converge imediatamente para o vector próprio associado ao valor próprio a^2.

2.1c) Consideramos $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ os vectores coluna da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{6} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

e efectuamos a ortonormalização de Gram-Schmidt

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{a}_1/||\mathbf{a}_1|| = (6, 0, 0)/6 = (1, 0, 0); \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = (0, -2\sqrt{6}, 1) - 0; \mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_2/||\mathbf{v}_2|| = (0, -2\sqrt{6}, 1)/5 \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = (0, 1, -\sqrt{6}) - 0 - (-\frac{3}{5}\sqrt{6})(0, -2\sqrt{6}, 1)/5; \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{v}_3/||\mathbf{v}_3|| = (0, -\frac{11}{25}, -\frac{22}{25}\sqrt{6})/\frac{11}{5} = (0, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\sqrt{6}) \end{aligned}$$

ficando com a matriz ortogonal

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{6} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

como $Q^\top Q = I$, obtemos de $A = QR \Rightarrow R = Q^\top A$, ou seja

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{6} & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{6} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{3}{5}\sqrt{6} \\ 0 & 0 & \frac{11}{5} \end{bmatrix},$$

e portanto $A_1 = RQ = Q^\top AQ$ dá

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{3}{5}\sqrt{6} \\ 0 & 0 & \frac{11}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{6} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{53}{25}\sqrt{6} & \frac{11}{25} \\ 0 & \frac{11}{25} & -\frac{22}{25}\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Sendo $\lambda_1 = 6$ correcto, as aproximações são $\tilde{\lambda}_2 = -\frac{53}{25}\sqrt{6} = -5.19..$, $\tilde{\lambda}_3 = -\frac{22}{25}\sqrt{6} = -2.155..$, que estão próximos dos valores correctos $\lambda_2 = -5.25..$, $\lambda_3 = -2.09..$ (e na tolerância para a diagonal 0.44).

2.2a) Sendo

$$u_{n+1} = u_n + h\Phi_h(t_n, u_n) = (1 + h^p)u_n + hf(u_n)$$

temos $\Phi_h(t, u) = h^{p-1}u + f(u)$.

Devemos verificar a consistência

$$\begin{aligned} \frac{u(t_n + h) - u(t_n)}{h} - \Phi_h(t_n, u(t_n)) &= u'(t_n) + \frac{h}{2}u''(\xi_n) - h^{p-1}u(t_n) - f(u(t_n)) \\ &= \frac{h}{2}u''(\xi_n) - h^{p-1}u(t_n) = \left(\frac{1}{2}u''(\xi_n) - h^{p-2}u(t_n)\right)h \end{aligned}$$

e o método só é consistente de ordem 1 se $p \geq 2$. Tratando-se de um método unipasso, a convergência fica assegurada, para h suficientemente pequeno, sendo também de ordem 1.

2.2b) A estabilidade é verificada pela equação característica

$$r^2 = \alpha r + (1 - \alpha), \text{ associada a } u_{n+1} = \alpha u_n + (1 - \alpha)u_{n-1}$$

basta analisar as raízes dessa equação, que são $r_1 = 1, r_2 = \alpha - 1$. Devemos obter $r_2 \in [-1, 1[$ (evitando a raiz dupla em 1), pelo que $-1 \leq \alpha - 1 < 1$, ou seja $\alpha \in [0, 2[$. As raízes são assim distintas e de módulo não superior a 1, havendo estabilidade.

2.2c) Neste caso o método de Euler escreve-se na forma $u_{n+1} = u_n + hf(u_n) = g(u_n)$ com $g(x) = x + hf(x)$. Temos ainda $g'(x) = 1 + hf'(x)$, e considerando $0 < h < \varepsilon$ obtemos $g'(x) \in [1 - \frac{h}{\varepsilon}, 1 - \varepsilon h] \subset [0, 1 - h]$ pelo que g é uma contracção em $\mathbb{R}$ e a sucessão (u_n) converge para esse ponto fixo z, e $z = g(z) = z + hf(z)$ implica $f(z) = 0$. (Note que f é estritamente descrescente, tendo obrigatoriamente um e um só zero)

2.3) Aplicamos as habituais diferenças de segunda ordem aos três pontos internos dos cinco pontos $t_n = nh$, com $n = 0, \ldots, 4$.

$$\begin{aligned} u''(t_n) &= \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + O(h^2); \\ u'(t_n) &= \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} + O(h^2) \end{aligned}$$

Com $h = \frac{1}{4}$, sendo $u_0 = u_4 = 1$, temos para $n = 1, 2, 3$:

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h(1 + t_n)} - \frac{u_n}{(1 + t_n)} = f(t_n)$$

com $f_n = f(t_n)$, resulta no sistema 3×3 :

$$\begin{bmatrix} -\frac{164}{5} & \frac{88}{5} & 0 \\ \frac{44}{3} & -\frac{98}{3} & \frac{52}{3} \\ 0 & \frac{104}{7} & -\frac{228}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - \frac{72}{5} \\ f_2 \\ f_3 - \frac{120}{7} \end{bmatrix}$$

2.5 Exame 2 (2010/11)

2.5.1 Primeira Parte

1.1) Seja $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$.

a) Determine um p_n polinómio interpolador de f nos nós $\{-1, 0, 1\}$, tal que

$$f'(0) = p_n'(0),\ f''(0) = p_n''(0).$$

b) Deduza um majorante do erro de interpolação $||f - p_n||_\infty$ no intervalo $[-2, 2]$.

1.2) Considere S spline cúbico natural interpolador de $f \in C^4[a, b]$ nos nós $x_j = a + jh$, ($h = \frac{b-a}{N}$).

a) Determine $K > 0$, tal que se verifique a estimativa

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b S(x)dx \right| \leq Kh^4.$$

b) Considere o vector TFD: $z_k = [\mathcal{F}(s_j)]_k$ em que $s_j = S(x_j)$, com $j, k = 0, \cdots, N-1$. Mostre que a parte real de

$$T(x) = \sum_{k=0}^{N-1} z_k \exp(2\pi i \frac{x-a}{b-a} k)$$

é um interpolador trigonométrico de f nos pontos x_j.

1.3) Determine uma fórmula de derivação numérica, para $f'(z)$, usando os valores

$$f(z - 3h),\ f(z - h),\ f(z),\ f(z + 2h),$$

com $h > 0$, de forma a ter erro $O(h^p)$, com o maior p possível.

Explicite o erro dessa fórmula quando $f(x) = x^3$.

1.4) Justifique se $p_3(x) = x^3 + x^2 - \frac{1}{8}$ é ou não a melhor aproximação uniforme em $\mathbb{P}_3$ de $f(x) = x^4 + x^3$ no intervalo $[-1, 1]$.

2.5.2 Segunda Parte

2.1) Sejam $a, b \in \mathbb{C}$, $|a|, |b| < 1$, e considere a matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 8 & b & 0 & 0 \\ a & -3 & b & 0 \\ 0 & a & 4 & b \\ 0 & 0 & a & -6 \end{bmatrix}$$

a) Mostre, quando os valores próprios de A são sempre reais, localize os intervalos disjuntos, e que há um valor próprio dominante; comente a invertibilidade.

b) Aplique duas iteradas do método das potências, para aproximar o maior valor próprio.

c) Sendo $a = 0$, apresente a decomposição QR, e calculando uma iterada do método QR comente os resultados.

2.2)Considere o problema de Cauchy ($f, g \in C^1$ limitadas)

$$\begin{cases} u'(t) = g(t) + f(u(t)), & t \in [0, T] \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

a) Mostre que se $g \equiv 0$, pelo método de Euler obtém

$$u_n = h \sum_{k=0}^{n-1} f(u_k).$$

b) Considere

$$u_{n+1} = u_n + h^p(g'(t_n) + f'(u_n)) + h(g(t_n) + f(u_n)),$$

com $u_0 = 0$. Discuta a convergência e A-estabilidade deste método em função do expoente $p \in \mathbb{Z}$.

2.3)Considere a equação diferencial de segunda ordem no intervalo $[0, 1]$,

$$u''(t) + u'(t)u(t) = 1$$

a) Com $u(0) = u'(0) = 0$, aplique duas iteradas do método RK do ponto-médio para aproximar $u(1)$.

b) Sendo $u(0) = u(1) = 1$, com $h = \frac{1}{2}$, apresente a aproximação de $u(\frac{1}{2})$, por aplicação de diferenças finitas de 2ª ordem.

2.6 Resolução - Exame 2 (2010/11)

2.6.1 Primeira Parte - Resolução

1.1a) Notamos que

$$f[x,x] = f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x), -(\frac{\pi}{2})^2\sin(\frac{\pi}{2}x) = f''(x) = 2f[x,x,x],$$

portanto:

x	-1		0		0		0		1
f	-1		0		0		0		1
$f[,]$		1		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		1	
$f[,,]$			$\frac{\pi-2}{2}$		0		$\frac{2-\pi}{2}$		
$f[,,,]$				$\frac{2-\pi}{2}$		$\frac{2-\pi}{2}$			
$f[,,,,]$					0				

logo pela F. Newton generalizada

$$p_4(x) = -1 + (x+1) + \frac{\pi-2}{2}x(x+1) + \frac{2-\pi}{2}x^2(x+1)$$

1.1b) A fórmula do erro dá-nos

$$f(x) - p_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!}x^3(x^2-1),$$

logo como $|f^{(5)}(x)| = (\frac{\pi}{2})^5|\cos(\frac{\pi}{2}x)| \leq (\frac{\pi}{2})^5$

$$||f - p_5||_\infty = \frac{(\frac{\pi}{2})^5}{5!}\max_{x\in[-2,2]}|x^3(x^2-1)| \leq \frac{\pi^5}{5!2^5}24 = 1.926...$$

1.2a) Temos a estimativa de erro $||f-S||_\infty \leq \frac{h^4}{16}||f^{(4)}||_\infty$ portanto

$$\left|\int_a^b f(x) - S(x)dx\right| \leq (b-a)||f-S||_\infty \leq (b-a)\frac{h^4}{16}||f^{(4)}||_\infty, \text{ ou seja } K \geq \frac{b-a}{16}||f^{(4)}||_\infty$$

1.2b) Basta reparar que $x_j - a = j\frac{b-a}{N}$, por isso como $\mathbf{W}\mathbf{W}^* = N\,\mathbf{I}$

$$\begin{aligned} T(x_j) &= \sum_{k=0}^{N-1} z_k \exp(2\pi i\frac{x_j-a}{b-a}k) = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} W^*_{km}s_m W_{jk} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}(\sum_{k=0}^{N-1} W_{jk}W^*_{km})s_m = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} N\delta_{jm}s_m = s_j = f_j \end{aligned}$$

(a parte real pode ser usada pois os f_j são reais).

1.3) Os nós são $x_0 = z-3h$, $x_1 = z-h$, $x_2 = z$, $x_3 = z+2h$, logo $W_3(x) = (x-x_0)...(x-x_3)$ implica

$$W_3(z) = 0,\ W_3'(z) = (3h)(h)(-2h) + 0 + 0 + 0 = -6h^3,$$

e pela fórmula de erro, $f'(z)-p_3'(z) = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}(-6h^3)$, ou seja conseguimos um erro $O(h^3)$ usando a interpolação que apenas anula $W_3(z)$. Essa interpolação pode ser expressa pela fórmula de Newton

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f[z-3h] + f[z-3h, z-h](x-z+3h) \\ &\quad + f[z-3h, z-h, z](x-z+3h)(x-z+h) \\ &\quad + f[z-3h, z-h, z, z+2h](x-z+3h)(x-z+h)(x-z) \end{aligned}$$

de onde a fórmula de aproximação é dada por

$$\begin{aligned} f'(z) \approx p_3'(z) &= f[z-3h, z-h] + f[z-3h, z-h, z](4h) + f[z-3h, z-h, z, z+2h](3h^2) \\ &= f[z-3h, z-h] + f[z-3h, z-h, z](\frac{17}{5}h) + f[z-h, z, z+2h]\frac{3}{5}h \\ &= f[z-3h, z-h](\frac{-2}{15}) + f[z-h, z](\frac{17}{15}) + f[z-h, z](\frac{-3}{10}) + f[z, z+2h]\frac{3}{10} \\ &= \frac{-4}{30}f[z-3h, z-h] + f[z-h, z](\frac{25}{30}) + 9f[z, z+2h] \end{aligned}$$

1.4) Para verificar se p_3é a melhor aproximação $\mathbb{P}_3$ relativamente a $f(x) = x^4 + x^3$ em $[-1, 1]$, usamos o Teorema de Chebyshev. O p_3 deve verificar uma equioscilação em 5 pontos do intervalo:

$$r(x_k) = f(x_k) - p_3(x_k) = (-1)^k ||f - p_3||_\infty$$

Ora, como $||f-p_3||_\infty = \max |x^4-x^2+\frac{1}{8}|$ vemos que $r(x) = x^4-x^2+\frac{1}{8}$ verifica $r'(z) = 4z^3-2z = 0$ se $z = 0$ ou $z = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, e estes são os extremos internos, com $r(0) = \frac{1}{8}$ e $r(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{8}$, tendo nos extremos do intervalo $r(\pm 1) = \frac{1}{8}$. Concluímos assim que os 5 pontos $\{-2, -\sqrt{\frac{1}{2}}, 0, \sqrt{\frac{1}{2}}, 2\} \in [-2, 2]$ satisfazem a equioscilação e trata-se da melhor aproximação uniforme.

[Resolução alternativa: considerar a aproximação de x^4 por polinómios de Chebyshev.]

2.6.2 Segunda Parte - Resolução

2.1a) As bolas definidas pelo T. Gerschgorin (analisando por linhas) são disjuntas porque

$$\begin{aligned} \bar{B}(8, |b|) \subset \bar{B}(8, 1) \quad &, \quad \bar{B}(4, |a| + |b|) \subset \bar{B}(4, 2) \\ \bar{B}(-6, |a|) \subset \bar{B}(-6, 1) \quad &, \quad \bar{B}(-3, |a| + |b|) \subset \bar{B}(-3, 2) \end{aligned}$$

Na parte real positiva, $\bar{B}(8,1) \cap \bar{B}(4,2) = \emptyset$, e na negativa, $\bar{B}(-6,1) \cap \bar{B}(-3,2) = \emptyset$, portanto não há qualquer intersecção e há no máximo um valor próprio em cada uma das bolas. Se $a, b \in \mathbb{R}$ implica que estes valores próprios são reais, ou então se $a = b^*$, porque a matriz será hermitiana. Nessas condições ficam definidos valores próprios nos intervalos disjuntos

$$\lambda_1 \in]7,9[,\ \lambda_2 \in]-7,-5[,\ \lambda_3 \in]2,6[,\ \lambda_4 \in]-5,-1[$$

(intervalos são abertos porque é estritamente que temos $|a|, |b| < 1$). Nenhum valor próprio pode ser nulo, e $\lambda_1 \in]7,9[$ será o dominante. A análise por colunas levaria à mesma conclusão

2.1b) Como $|a|, |b| < 1$, as iteradas do método das potências dão

$$\begin{aligned} v^{(1)} &= Au^{(0)} = A = \begin{bmatrix} 8 & b & 0 & 0 \\ a & -3 & b & 0 \\ 0 & a & 4 & b \\ 0 & 0 & a & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ u^{(1)} &= \frac{v^{(1)}}{8} = (1, \frac{a}{8}, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{(2)} &= Au^{(0)} = A = \begin{bmatrix} 8 & b & 0 & 0 \\ a & -3 & b & 0 \\ 0 & a & 4 & b \\ 0 & 0 & a & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a/8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 + ba/8 \\ 5a/8 \\ a^2/8 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ u^{(2)} &= \frac{v^{(2)}}{8 + ba/8} = (1, \frac{5a}{64 + ba}, \frac{a^2}{64 + ba}, 0) \end{aligned}$$

e a primeira componente de $Au^{(2)}$ dá a aproximação $\lambda_2 = 8 + \frac{5ab}{64+ab}$

2.1c) Este caso é trivial, pois se $a = 0$, temos A triangular superior e $A = IR$, os valores próprios são os elementos da diagonal.

Ou seja, $Q_0 = I, R_0 = A$, portanto a primeira iterada dá ainda $A_1 = R_0 Q_0 = RI = A$, pois a factorização exacta já foi alcançada.

2.2a) Com $g = 0$, e como $u_0 = u(0) = 0$, (verifica-se para $n = 0$) e pelo método de Euler temos $u_1 = u_0 + hf(u_0) = hf(u_0)$ e verifica-se para $n = 1$. Assumindo a hipótese de indução em n,

$$u_{n+1} = u_n + hf(u_n) = h \sum_{k=0}^{n-1} f(u_k) + hf(u_n) = h \sum_{k=0}^{n} f(u_k),$$

e a tese de indução é verificada em $n + 1$.

2.2b) Devemos verificar a consistência, com $\Phi_h(t_n, u_n) = h^{p-1}(g'(t_n)+f'(u_n))+g(t_n)+f(u_n)$

$$\begin{aligned}
\frac{u(t_n+h)-u(t_n)}{h} - \Phi_h(t_n, u(t_n)) &= u'(t_n) + \frac{h}{2}u''(t_n) + \frac{h^2}{6}u'''(\xi_n) \\
&\quad -h^{p-1}(g'(t_n) + f'(u(t_n))) - g(t_n) - f(u(t_n)) \\
&= \frac{h}{2}u''(t_n) + \frac{h^2}{6}u'''(\xi_n) - h^{p-1}(g'(t_n) + f'(u(t_n)))
\end{aligned}$$

Como $u''(t_n) = g'(t_n) + u'(t_n)f'(u(t_n)) \neq 2h^{p-2}(g'(t_n) + f'(u(t_n)))$ as parcelas não se anulam, e o método é apenas consistente de ordem 1 para $p \geq 2$, pois o termo é $O(h)$. Tratando-se de um método unipasso, quando $h \to 0$, a convergência fica assegurada, sendo também de ordem 1.

A A-estabilidade verifica-se para equações da forma $u'(t) = \alpha u(t)$, o que neste caso significa $g = 0, f(u) = \alpha u$. Assim,

$$u_{n+1} = u_n + h^p f'(u_n) + hf(u_n) = u_n + \alpha h^p + \alpha h u_n$$

e esta sucessão $u_{n+1} = (1+\alpha h)u_n + \alpha h^p$. Uma solução particular da equação às diferenças é $v_n = -h^{p-1}$, por isso o termo geral é

$$u_n = (1+\alpha h)^n(u_0 + h^{p-1}) - h^{p-1},$$

pelo que a sucessão é limitada quando $|1+\alpha h| \leq 1$ e fica assim definida a região de A-estabilidade.

2.3a) Escrevemos a equação na forma vectorial, usando $v(t) = u'(t)$,

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 1-uv \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix})$$

e o método RK ponto-médio resume-se neste caso a

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} + h\mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix})\right) = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} + h\mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} u_n + \frac{h}{2}v_n \\ v_n + \frac{h}{2}(1-u_nv_n) \end{bmatrix}\right)$$

e de $(u_0, v_0) = (u(0), u'(0)) = (0,0)$, com $h = \frac{1}{2}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + h\mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} 0 + \frac{h}{2}0 \\ 0 + \frac{h}{2}(1-0) \end{bmatrix}\right) = h\begin{bmatrix} \frac{h}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + h\mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{8} + \frac{h}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} + \frac{h}{2}(1-\frac{1}{16}) = \frac{47}{64} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{47}{64} \\ 1 - \frac{47}{64}\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

2.3b) A equação é $u'' + uu' = 1$. Aplicamos as habituais diferenças de segunda ordem aos três pontos internos dos cinco pontos $t_n = nh$, com $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned} u''(t_n) &= \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + O(h^2); \\ u'(t_n) &= \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} + O(h^2) \end{aligned}$$

Com $h = \frac{1}{2}$, sendo $u_0 = u_2 = 1$, temos para $n = 1$:

$$\begin{aligned} u''(t_1) + u'(t_1)u(t_1) &\approx \frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{h^2} + \frac{u_2 - u_0}{2h}u_1 = 1 \\ \frac{2 - 2u_1}{(1/2)^2} + 0u_1 &= 1 \\ u(t_1) \approx u_1 &= 1 + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

3 Exercícios (2011)

3.1 Teste 1 (2011)

3.1.1 Enunciado

1) Considere $\phi(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que se ϕ verificar as condições de interpolação $\phi(\theta) = f_0$, $\phi(\theta + \frac{\pi}{2}) = f_1$, o vector de coeficientes (a, b), solução do problema, relaciona-se com (f_0, f_1) através de uma rotação. Indique qual e justifique.

b) Determine a função ϕ que minimiza $\int_{-\pi}^{\pi}(1 - 2\phi(t) + \phi(t)^2)dt$.

2) Usando a interpolação de Hermite, identifique coeficientes $\alpha_0, \ldots, \alpha_4$, tais que dada $f \in C^4[x-h, x+h]$, existe $\xi \in [x-h, x+h]$:

$$f(x+h) = \alpha_0 f(x-h) + \alpha_1 f(x) + \alpha_2 f'(x) + \alpha_3 f''(x) + \alpha_4 f^{(4)}(\xi).$$

3)

a) Determine a expressão simplificada de $s_n = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(k^2 - k)$.

b) Dada uma função natural u, considere o operador linear de soma

$$S(u) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

Determine uma fórmula de aproximação, $Q(u) = au_{n-1} + bu_n$, que tenha grau 1 e mostre que não tem grau 2.

4) Seja f analítica, tal que se $x_0, \ldots, x_4 \in [0, 1]$,

$$|f[x_0, \ldots, x_4]| \leq 100.$$

Pretende-se avaliar a função em milhares de pontos de [0,1], com um erro inferior a 10^{-6}. Usando um spline cúbico, determine qual o número menor de pontos (igualmente espaçados de $h = 1/n$) que pode assegurar a mesma precisão, evitando o cálculo moroso de f.

5) Determine uma fórmula de aproximação de $f'(z)$ com base nos valores de

$$f(z-h), f(z), f(z+3h),$$

e discuta o erro tendo em conta os erros de arredondamento.

3.2 Resolução - Teste 1 (2011)

1a) Temos duas funções base $g_0(t) = \cos(t)$, $g_1(t) = \sin(t)$, e dois nós de interpolação $x_0 = \theta, x_1 = \theta + \frac{\pi}{2}$. A matriz de interpolação (de Vandermonde generalizada), $g_j(x_i)$ fica então:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) & \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

ou seja, a matriz de rotação de um vector por um ângulo θ, que é unitária verificando $\mathbf{V}^\top \mathbf{V} = \mathbf{I}$. Logo a solução do sistema $\mathbf{Va} = \mathbf{f}$, fica $\mathbf{a} = \mathbf{V}^\top \mathbf{f}$, e corresponde à rotação oposta $(-\theta)$ do vector $\mathbf{f}$.

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}^\top \mathbf{f} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix}.$$

1b) O valor a minimizar é $Q = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - 2\phi(t) + \phi(t)^2) dt = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \phi(t))^2 dt = ||1 - \phi||^2_{L^2(-\pi,\pi)}$. Portanto trata-se de um problema de mínimos quadrados em $L^2(-\pi, \pi)$, com as funções base g_0, g_1 definidas em 1.a), para aproximar a função constante $f = 1$. A resolução é habitualmente feita através do sistema normal,

$$\begin{bmatrix} \langle \cos, \cos \rangle & \langle \cos, \sin \rangle \\ \langle \cos, \sin \rangle & \langle \sin, \sin \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 1, \cos \rangle \\ \langle 1, \sin \rangle \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e $\phi = 0$.

Nota: Podia-se ainda reparar que $\{1, \cos, \sin\}$ são as primeiras funções da expansão ortogonal em série de Fourier em $L^2(-\pi, \pi)$, e assim era imediato ser a solução nula.

2) A expansão resulta de interpretar o problema de interpolação de Hermite nos nós $z_0 = x - h$, $z_1 = x$, $z_2 = x$, $z_3 = x$, em que a repetição dos 3 nós em x se justifica pela expressão até à 2ª derivada.

Sabemos por isso que o polinómio interpolador é dado pela fórmula de Newton generalizada,

$$p_3(t) = f(x-h) + f[x-h, x](t-x+h) + f[x-h, x, x](t-x+h)(t-x) + f[x-h, x, x, x](t-x+h)(t-x)^2,$$

e sendo calculado em $t = x + h$, obtemos

$$p_3(x+h) = f(x-h) + f[x-h, x](2h) + f[x-h, x, x](2h)h + f[x-h, x, x, x](2h)h^2,$$

e podemos usar a expressão do erro de interpolação

$$f(x+h) - p_3(x+h) = f[x-h, x, x, x, x+h](2h)h^3 = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(2h^4), \text{ com } \xi \in [x-h, x+h].$$

Conclui-se assim que $f(x+h) = p_3(x+h) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{12}h^4$, e resulta $\alpha_4 = \frac{h^2}{12}$, e os outros termos saem explicitando $p_3(x+h)$.

$$\begin{aligned}
p_3(x+h) &= f(x-h) + f[x-h,x](2h) + (f'(x) - f[x-h,x])(2h) \\
&\quad +(\frac{1}{2}f''(x) - f[x-h,x,x])(2h)h \\
&= f(x-h) + f'(x)(2h) + f''(x)h^2 - (f'(x) - f[x-h,x])(2h) \\
&= f(x-h) + f''(x)h^2 + f[x-h,x])(2h) = -f(x-h) + 2f(x) + f''(x)h^2,
\end{aligned}$$

ou seja, $\alpha_0 = -1, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = h^2$.

Nota: De forma mais simples, poderíamos invocar a aproximação da 2ª derivada por diferenças centradas com a expressão do erro. É esse o resultado obtido, mas escrito doutra forma:

$$f(x+h) = -f(x-h) + 2f(x) + f''(x)h^2 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{12}h^4.$$

3a) Aplicamos a soma por partes com $\Delta u_k = C^k$ $(C = -1), v_k = k^{[2]} = k(k-1) = k^2 - k$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(k^2-k) &= \sum_{k=0}^{n-1}(\Delta u_k)v_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\Delta(u_k v_k) - \sum_{k=0}^{n-1}u_{k+1}\Delta(v_k) \\
&= [u_k v_k]_0^n - \sum_{k=0}^{n-1}u_{k+1}\Delta(v_k)
\end{aligned}$$

e sabemos que $\Delta v_k = \Delta k^{[2]} = 2k$, e também que $\Delta C^k = (C-1)C^k$, por isso $\frac{\Delta C^k}{C-1} = C^k$, com $u_k = \frac{C^k}{C-1}$. Ou seja, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(k^2-k) &= \left[\frac{C^k}{C-1}k(k-1)\right]_0^n - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{C^{k+1}}{C-1}(2k) \\
&= \frac{C^n n(n-1)}{C-1} - \frac{2C}{C-1}\sum_{k=0}^{n-1}kC^k.
\end{aligned}$$

O valor $\sum_{k=0}^{n-1}kC^k$ foi calculado em exercício, mas basta aplicar de novo a soma por partes

$$\sum_{k=0}^{n-1}C^k k = \left[\frac{C^k}{C-1}k\right]_0^n - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{C^{k+1}}{C-1} = \frac{C^n n}{C-1} - C\frac{C^n-1}{(C-1)^2}$$

concluindo

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(k^2-k) &= \frac{C^n n(n-1)}{C-1} - \frac{2C}{C-1}(\frac{C^n n}{C-1} - C\frac{C^n-1}{(C-1)^2}) \\ &= \frac{(-1)^n n(n-1)}{-2} - (\frac{(-1)^n n}{-2} + \frac{(-1)^n-1}{4}) \\ &= \begin{cases} n(1-n)/2, & (n\ par) \\ (n-1)^2/2, & (n\ impar) \end{cases}.\end{aligned}$$

3b) A fórmula terá grau 1 se verificar $S(1) = Q(1), S(x) = Q(x)$, ou seja,

$$S(1) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n = Q(1) = a+b, \quad S(x) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n^{[2]}}{2} = Q(x) = a(n-1)+bn,$$

de onde sai $a+b=n$, $(a+b)n - a = \frac{n^{[2]}}{2}$, ou seja $a = \frac{(n+1)^{[2]}}{2}, b = \frac{n^{[2]}}{2}$, ficando

$$Q(u) = \frac{(n+1)^{[2]}}{2}u_{n-1} + \frac{n^{[2]}}{2}u_n = n^2\frac{u_{n-1}+u_n}{2} + n\frac{u_{n-1}-u_n}{2}$$

esta fórmula já não tem grau 2, pois

$$\begin{aligned}Q(x^{[2]}) &= \frac{(n+1)^{[2]}}{2}(n-1)^{[2]} + \frac{n^{[2]}}{2}n^{[2]} \\ &\neq \frac{n^{[3]}}{3} = \sum_{k=0}^{n-1}\Delta(\frac{k^{[3]}}{3}) = \sum_{k=0}^{n-1} k^{[2]} = S(x^{[2]}).\end{aligned}$$

4) Em particular, quando $x_0, x_1, \ldots x_4 \to x$, temos $|f[x,x,x,x,x]| = |\frac{1}{4!}f^{(4)}(x)| \leq 100$, pois $f \in C^4$ sendo analítica. Usando a estimativa de erro para os splines cúbicos, e como $h = 1/n$,

$$||f-s||_\infty \leq \frac{h^4}{16}||f^{(4)}||_\infty \leq \frac{1}{(2n)^4}||f^{(4)}||_\infty \leq \frac{1}{16n^4}24 \times 100 < 10^{-6}$$

obtemos $n^4 > \frac{3}{2}10^8$, bastando por isso considerar $n > \sqrt[4]{\frac{3}{2}}10^2 \sim 110.67$, ou seja 111 pontos (usando a outra estimativa com $\frac{5}{384}$ poderíamos obter apenas 75 pontos).

5) Temos $E(x) = f(x) - p_2(x) = f[z-h, z, z+3h, x]W_2(x)$, com

$$W_2(x) = (x-z+h)(x-z)(x-z-3h)$$

e $W_2(z) = 0$.

Como

$$W_2'(x) = (x-z)(x-z-3h) + (x-z+h)(x-z-3h) + (x-z)(x-z+h),$$

tem-se $W_2'(z) = -3h^2$.

$$E'(z) = \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{4!}W_2(z) + \frac{f^{(3)}(\xi_1)}{3!}W_2'(z) = -\frac{f^{(3)}(\xi_1)}{2}h^2.$$

Finalmente,

$$p_2(x) = f(z-h) + f[z-h,z](x-z+h) + f[z-h,z,z+3h](x-z+h)(x-z),$$

pelo que

$$p_2'(x) = f[z-h,z] + f[z-h,z,z+3h](2(x-z)+h),$$

e obtemos

$$\begin{aligned} p_2'(z) &= f[z-h,z] + f[z-h,z,z+3h]h \\ &= f[z-h,z] + \frac{f[z,z+3h]-f[z-h,z]}{4h}h = \frac{f[z,z+3h]+3f[z-h,z]}{4} \\ &= \frac{f(z+3h)+8f(z)-9f(z-h)}{12h}. \end{aligned}$$

A fórmula final (sem erros de arredondamento fica assim

$$f'(z) = \frac{f(z+3h)+8f(z)-9f(z-h)}{12h} - \frac{f^{(3)}(\xi_1)}{2}h^2.$$

Ao adicionar os erros de arredondamento

$$f(z-h) - \tilde{f}_{-1} = \epsilon_{-1},\ f(z) - \tilde{f}_0 = \epsilon_0,\ f(z+3h) - \tilde{f}_3 = \epsilon_3,$$

a expressão tem o erro

$$\begin{aligned} \tilde{E}(z) &= f'(z) - \frac{\tilde{f}_3 + 8\tilde{f}_0 - 9\tilde{f}_{-1}}{12h} \\ &= \frac{f(z+3h)+8f(z)-9f(z-h)}{12h} - \frac{\tilde{f}_3+8\tilde{f}_0-9\tilde{f}_{-1}}{12h} - \frac{f^{(3)}(\xi_1)}{2}h^2 \end{aligned}$$

e com $|\epsilon_k| \leq \epsilon$ (máximo erro de arredondamento), obtemos pela desigualdade triangular

$$\left|\frac{f(z+3h)+8f(z)-9f(z-h)}{12h} - \frac{\tilde{f}_3+8\tilde{f}_0-9\tilde{f}_{-1}}{12h}\right| = \left|\frac{\epsilon_3+8\epsilon_0-9\epsilon_{-1}}{12h}\right| \leq \frac{18\epsilon}{12h}$$

conclui-se que o erro com arredondamento é

$$|\tilde{E}(z)| = \left| f'(z) - \frac{\tilde{f}_3 + 8\tilde{f}_0 - 9\tilde{f}_{-1}}{12h} \right| \leq \frac{9\epsilon}{4h} + \frac{h^2}{2}||f^{(3)}||_\infty$$

e assim para valores de $\epsilon = O(h^p)$, temos $|\tilde{E}(z)| = O(h^{p-1}) + O(h^2)$ e a expressão só se mantém em $O(h^2)$ se $p \geq 3$. Ou seja, se usarmos $h \ll \epsilon^{1/3}$ a precisão teórica da fórmula em $O(h^2)$ é perdida numericamente. Na prática, como a maioria dos computadores usa precisão dupla com $\epsilon \sim 10^{-15}$, isto significa que a fórmula deixa de ser quadraticamente eficaz para $h \ll 10^{-5}$. Para além disso, perde mesmo a convergência linear $|\tilde{E}(z)| = O(h)$, quando $h \ll 10^{-8}$, notando que no limite, quando $h \approx 10^{-15}$, ou seja $\epsilon = O(h)$, então $|\tilde{E}(z)| = O(1)$ e a fórmula deixa de fazer sentido.

3.3 Exame 1 (2011/12)

3.3.1 Primeira Parte

1.1) Dado α, determine uma função f analítica que verifique

$$f(-1) = f(0) - \alpha = f(1) = 0$$

e tal que $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$.

1.2) Uma partícula de massa unitária está a uma altura $a(t)$ em função do tempo t.

No instante inicial tem altura e velocidade nula, ou seja, $a(0) = a'(0) = 0$.

Quando é medida no instante $t = 1$, a altura é $a(1) = 1$, tendo velocidade e aceleração nula, ou seja, $a'(1) = a''(1) = 0$.

a) Determine a aceleração inicial $a''(0)$ de forma a que a trajectória $a(t)$ se defina pelo polinómio de menor grau que verifica $a(2) = 0$.

b) Mostre que, independentemente do valor de $a(2)$, se a trajectória definida for uma função $a \in C^4[0, 2]$, não pode verificar $||a^{(4)}||_\infty \leq 50$.

1.3) a) Determine a expressão simplificada do somatório $(m = 0, \ldots, N-1)$:

$$\sum_{k=0}^{N-1} k \cos(\frac{2\pi}{N} mk) = \mathrm{Re}(\mathcal{F}(k)_m).$$

b) Apresente uma expressão trigonométrica de g que verifica $g(\frac{\pi}{4}k) = k$, com $k = 0, \ldots, 7$.

1.4) Apresente $S(1)$, em que S é o spline cúbico natural : $S(-1) = 0$, $S(0) = 1$, $S(3) = 1$.

1.5) Com base nos valores de $f(z), f(z + 2h), f(z + 3h)$, aproxime $f''(z)$ majorando o erro absoluto em função de h e $||f^{(k)}||_\infty$.

3.3.2 Segunda Parte

2.1) Determine

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}} \max_{x\in[-1,1]} |x^3 - x^2 + ax + b|,$$

e comente face à aproximação minimax $\mathbb{P}_2$ de $f(x) = x^3 - x^2$.

2.2) Sejam $a, b \in \mathbb{C}$, e considere a matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} -8 & a & 0 \\ b & 3 & a \\ 0 & b & -2 \end{bmatrix}$$

a) Indique condições para: (i) os valores próprios de A serem reais, localizando intervalos; (ii) garantir valor próprio real dominante; (iii) a invertibilidade de A.

b) Nas condições anteriores aplique uma iteração do método das potências, para aproximar o maior valor próprio.

c) Sendo $a = b = 6$, use uma iteração do método QR para aproximar os 3 valores próprios.

2.3) Considere a equação diferencial de segunda ordem

$$u''(t) = (u(t) + u'(t))^2 + 1.$$

a) Com $u(0) = u'(0) = 0$, use o método RK(ponto-médio) com $h = 0.5$ para aproximar $u(1)$.

b) Sendo $u(0) = u(2) = 0$, com $h = 1$, apresente a aproximação de $u(1)$, por aplicação de diferenças finitas de 2ª ordem. Comente sobre o erro local de discretização.

2.4) Para a resolução do problema de Cauchy, considere o método de passo duplo

$$y_{n+1} = 4y_n - 3y_{n-1} - 2hf_n$$

Determine a ordem de consistência deste método. Justifique se o método será ou não convergente.

3.3.3 Primeira Parte - Resolução

1.1) Podemos considerar funções da forma $f(x) = \frac{1}{1+x^4} p_2(x)$ determinando p_2 verificando

$$p_2(x) = (1 + x^4) f(x)$$

para $x = -1, 0, 1$. Ou seja, basta obter o polinómio interpolador

$$p_2(-1) = 0, p_2(0) = \alpha, p_2(1) = 0,$$

que facilmente se deduz ser $p_2(x) = \alpha(1 - x^2)$. Fica assim

$$f(x) = \alpha \frac{1 - x^2}{1 + x^4}.$$

1.2.a) Temos a tabela de diferenças divididas generalizada:

x	0		0		0		1		1		1		2
a	0		0		0		1		1		1		0
$a[,]$		0		0		1		0		0		-1	
$a[,,]$			$\frac{1}{2}\alpha$		1		-1		0		-1		
$a[,,,]$				$1 - \frac{1}{2}\alpha$		-2		1		-1			
$a[,,,,]$					$-3 + \frac{1}{2}\alpha$		3		-1				
$a[,,,,,]$						$6 - \frac{1}{2}\alpha$		-2					

logo para ter apenas grau 5, deve verificar $6 - \frac{1}{2}\alpha = -2$, ou seja $a''(0) = \alpha = 16$.

1.2.b) Pela tabela anterior vemos que $a[0, 0, 1, 1, 1] = 3...$ e como

$$a[0, 0, 1, 1, 1] = a^{(4)}(\xi)/24$$

temos $\exists \xi \in [0, 1] : \ a^{(4)}(\xi) = 72$. Logo

$$||a^{(4)}||_\infty = \max_{x \in [0,2]} |a^{(4)}(x)| \geq |a^{(4)}(\xi)| = 72.$$

1.3.a)

$$\sum_{k=0}^{N-1} k \, \cos(\tfrac{2\pi}{N} mk) = Re \sum_{k=0}^{N-1} k \, exp(-\tfrac{2\pi i}{N} mk) = Re \sum_{k=0}^{N-1} k \, C^k,$$

com $C = exp(-\frac{2\pi i}{N}m)$ e já vimos (aula prática) que

$$\sum_{k=0}^{N-1} k\, C^k = \frac{1}{C-1}\sum_{k=0}^{N-1} k\, \Delta C^k = N\frac{C^N}{C-1} - C\frac{C^N-1}{(C-1)^2}.$$

Logo $C^N = exp(-\frac{2\pi i}{N}mN) = 1$, portanto se $C \neq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} k\, \cos(\tfrac{2\pi}{N}mk) &= Re\left(N\frac{C^N}{C-1} - C\frac{C^N-1}{(C-1)^2}\right)\\ &= Re\left(N\frac{1}{C-1}\right) = \frac{N}{|C-1|^2}Re(\bar{C}-1)\end{aligned}$$

ou seja, como $|C-1|^2 = 2 - 2\cos(\frac{2\pi}{N}m)$, e como $Re(\bar{C}-1) = \cos(\frac{2\pi}{N}m) - 1$, obtemos

$$\sum_{k=0}^{N-1} k\, \cos(\tfrac{2\pi}{N}mk) = \begin{cases} N(N-1)/2, & (m=0)\\ -N/2 & (m \neq 0)\end{cases}$$

1.3.b) Sabemos que uma função interpoladora é

$$g(t) = \frac{1}{N}\mathcal{F}(k)\cdot \mathbf{u}(t) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} k\, C_m^k e^{imt}$$

com $C_m = e^{-\frac{2\pi i}{N}m}$. Usamos a expressão anterior se $m \neq 0$

$$\sum_{k=0}^{N-1} k\, C_m^k = N\frac{\bar{C}_m - 1}{|C_m - 1|^2},$$

e quando $m = 0$, dá $\frac{N-1}{2}$, logo

$$g(t) = \frac{N-1}{2} + \sum_{m=1}^{N-1}\frac{\bar{C}_m - 1}{|C_m-1|^2}e^{imt} = \frac{N-1}{2} + \sum_{m=1}^{N-1}\frac{e^{\frac{2\pi i}{N}m} - 1}{2 - 2\cos(\frac{2\pi}{N}m)}e^{imt}$$

a expressão trigonométrica é a parte real com $N = 8$, já que os pontos são $t_k = \frac{2\pi}{8}k$.

1.4) Há apenas uma incógnita $s''(0)$ pelo que o sistema se reduz a uma única equação

$$\frac{1+3}{3}s''(0) = s[0,3] - s[-1,0] = 0 - \frac{1-0}{1} = -1$$

logo $s''(0) = -3/4$, e assim substituindo quando $x \in [0,3]$:

$$s'(0) = s_{[0,3]} - \tfrac{3}{6}(2(-\tfrac{3}{4}) + 0) = \tfrac{3}{4};\ s(x) = 1 + \tfrac{3}{4}x - \tfrac{3}{8}x^2 + \tfrac{1}{24}x^3,$$

em particular $s(1) = 17/12$.

1.5) Temos $W_2(x) = (x-z)(x-z-2h)(x-z-3h)$ com

$$\begin{aligned} W_2'(x) &= (x-z)(x-z-3h) + (x-z)(x-z-2h) + (x-z-2h)(x-z-3h) \\ W_2''(x) &= 6(x-z) - 10h \end{aligned}$$

em particular $W_2(z) = 0, W_2'(z) = 6h^2, W_2''(z) = -10h$. Portanto

$$\begin{aligned} E_n''(z) &= f''(z) - p_2''(z) = 2\frac{f^{(4)}(\xi_2)}{4!}(6h^2) + \frac{f^{(3)}(\xi_1)}{3!}(-10h) \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{2}h^2 - \frac{5f^{(3)}(\xi_1)}{3}h \end{aligned}$$

é uma expressão em $O(h)$, e majoramos o erro absoluto em $C[z, z+3h]$

$$|f''(z) - p_2''(z)| \leq \frac{1}{2}h^2||f^{(4)}||_\infty + \frac{5}{3}h||f^{(3)}||_\infty.$$

Sabemos que

$$p_2(x) = f(z) + f[z, z+2h](x-z) + f[z, z+2h, z+3h](x-z)(x-z-2h).$$

Portanto

$$f''(z) \approx p_2''(z) = 2f[z, z+2h, z+3h] = \frac{2f(z+3h) - 3f(z+2h) + f(z)}{6h^2}$$

3.3.4 Segunda Parte - Resolução

2.1) Trata-se da aproximação minimax $\mathbb{P}_1$ da função contínua $f(x) = x^3 - x^2$ em $[-1, 1]$. Podemos aplicar o algoritmo de Remes começando com $X^{(0)} = \{-1, 0, 1\}$ obtendo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que dá $a = \frac{-1}{2}, b = 1, d = \frac{-1}{2}$, e a aproximação

$$p_1(x) = \frac{-1}{2} + x$$

verifica $f'(x) - p_1'(x) = 0$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

quando $x = 1$ ou $x = \frac{-1}{3}$. Como $(f - p_1)(\frac{-1}{3}) = \frac{37}{54} > |d|$, prosseguimos com $X^{(1)} = \{-1, \frac{-1}{3}, 1\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \frac{-1}{3} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{-4}{27} \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que dá $a = \frac{-11}{27}, b = 1, d = \frac{-16}{27}$, e como b é o mesmo, as soluções são as mesmas, tendo-se ainda $(f - p_1)(\frac{-1}{3}) = \frac{16}{27}$.

Concluímos por isso que $p_1(x) = \frac{-11}{27} + x$ e que $|d| = \frac{16}{27}$ é o mínimo pretendido, que é diferente do mínimo $\mathbb{P}_2$ pois sabemos que o polinómio mónico de Chebyshev $\hat{T}_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$ corresponderia a uma aproximação $p_2(x) = -x^2 + \frac{3}{4}x$ para que $f(x) - p_2(x) = \hat{T}_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$ (e nesse caso a distância seria $\frac{1}{2^{3-1}} = \frac{1}{4}$).

2.2.a) (i) Para que os valores próprios sejam reais uma condição suficiente é a matriz ser auto-adjunta, neste caso $\bar{a} = b$, mas podemos ainda garantir definindo bolas disjuntas, pelo T. Gershgorin (linhas). Basta para isso separar as bolas

$$\bar{B}(-8, |a|), \bar{B}(3, |a| + |b|), \bar{B}(-2, |b|),$$

quando $a, b \in \mathbb{R}$. Ou seja, $-8 + |a| \leq -2 - |b|$ e $-2 + |b| \leq 3 - |a| - |b|$, o que dá

$$|a| + |b| \leq 6, |a| + 2|b| \leq 5,$$

ficando apenas a segunda condição (pois $|a| + |b| \leq 5 - |b| \leq 6$).

Análise semelhante podia ser feita por colunas, dando $2|a| + |b| \leq 5$.

(ii) Para garantir valor próprio dominante, $|-8 + |a|| \geq 3 + |a| + |b|$, ou seja $5 \geq 2|a| + |b|$ condição anterior (valores reais, e semelhante usando colunas $5 \geq |a| + 2|b|$).

(iii) Para a invertibilidade, zero não deve pertencer a nenhuma das bolas - no caso real,
$|a| < 8, |a| + |b| < 3, |b| < 2$ (linhas) ou
$|b| < 8, |a| + |b| < 3, |a| < 2$ (colunas)
reduzem-se a $|a| + |b| < 3 \wedge (|a| < 2 \vee |b| < 2)$.
As três condições são verificadas quando $|a| + |b| < 2$.

2.2.b) Consideramos $\mathbf{u}^{(0)} = (1, 0, 0)$ obtendo $A\mathbf{u}^{(0)} = (-8, b, 0); \mathbf{u}^{(1)} = -\frac{(-8,b,0)}{8} = (1, -\frac{b}{8}, 0)$.
Portanto $\lambda^{(1)} = [A\mathbf{u}^{(1)}]_1 = -8 - \frac{1}{8}ab$.

2.2.c) Aplicando a factorização de Gram-Schmidt aos vectores $v_1 = (-8, 6, 0), v_2 = (6, 3, 6), v_3 = (0, 6, -2)$:

$$Q = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -4\sqrt{2} & 3 & 3 \\ 3\sqrt{2} & 4 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} 10 & -3 & \frac{18}{5} \\ 0 & 6\sqrt{2} & \frac{7}{5}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{17}{5}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

de onde

$$A_1 = RQ = \begin{bmatrix} 10 & -3 & \frac{18}{5} \\ 0 & 6\sqrt{2} & \frac{7}{5}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{17}{5}\sqrt{2} \end{bmatrix} \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -4\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{49}{5} & * & * \\ * & \frac{31}{5} & * \\ * & * & -\frac{17}{5} \end{bmatrix}$$

e as aproximações são esses valores da diagonal.

2.3.a) Consideramos $\mathbf{y} = (y_1, y_2) = (u, u')$, obtendo

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ (y_1 + y_2)^2 + 1 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}).$$

Precisamos de 2 iterações do método RK (pto-médio), começando com $\mathbf{y}^{(0)} = \mathbf{0}$ (condições iniciais dadas). Como $\mathbf{f}^{(0)} = (0, 1)$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(1)} &= \mathbf{y}^{(0)} + h\mathbf{f}(\mathbf{y}^{(0)} + \frac{h}{2}\mathbf{f}^{(0)}) = \frac{1}{2}\mathbf{f}(\frac{1}{4}\mathbf{f}^{(0)}) = \frac{1}{2}\mathbf{f}(0, \frac{1}{4}) = (\frac{1}{8}, \frac{17}{32}) \\ \mathbf{y}^{(2)} &= \mathbf{y}^{(1)} + h\mathbf{f}(\mathbf{y}^{(1)} + \frac{h}{2}\mathbf{f}^{(1)}) = (\frac{1}{8}, \frac{17}{32}) + \frac{1}{2}\mathbf{f}\big((\tfrac{1}{8}, \tfrac{17}{32}) + \tfrac{1}{4}(0.5312, 1.6887)\big) = (0.5695, 1.6887) \end{aligned}$$

e obtemos a aproximação $u(1) \approx \mathbf{y}_1^{(2)} = 0.5695$.

2.3.b) Considerando diferenças centradas aplicadas a

$$A_t u = u''(t) - (u(t) + u'(t))^2 - 1$$

obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{A}_t u &= \frac{u(t+h) - 2u(t) + u(t-h)}{h^2} - \left(u(t) + \frac{u(t+h) - u(t-h)}{2h}\right)^2 - 1 \\ &= u''(t) + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_1) - (u(t) + u'(t) + \frac{h^2}{3}u^{(3)}(\xi_2))^2 - 1 \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} A_t u - \tilde{A}_t u &= -\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_1) + (u(t) + u'(t))^2 - (u(t) + u'(t) + \frac{h^2}{3}u^{(3)}(\xi_2))^2 \\ &= -\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_1) - 2(u(t) + u'(t))\frac{h^2}{3}u^{(3)}(\xi_2) + \frac{h^4}{9}u^{(3)}(\xi_2)^2 = O(h^2) \end{aligned}$$

temos um erro local também em $O(h^2)$, de segunda ordem. A resolução por diferenças finitas envolve apenas a incógnita $u_1 \approx u(1)$, tendo-se $u_0 = u_2 = 0$ com $h = 1$ em

$$\frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{h^2} = \left(u_1 + \frac{u_2 - u_0}{2h}\right)^2 + 1 \Leftrightarrow -2u_1 = u_1^2 + 1$$

obtemos $u_1 = -1 \approx u(1)$.

2.4) Consideramos as expansões de Taylor

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + O(h^3) \\ 3y(t_{n-1}) &= 3y(t_n) - 3hy'(t_n) + 3\frac{h^2}{2}y''(t_n) + O(h^3) \\ y(t_{n+1}) - 4y(t_n) + 3y(t_{n-1}) &= 0 - 2hy'(t_n) + 2h^2y''(t_n) + O(h^3) \end{aligned}$$

portanto sendo $\Phi_h(t, y) = 2f(t, y)$, obtemos

$$\frac{y(t_{n+1}) - 4y(t_n) + 3y(t_{n-1})}{h} + 2f(t_n, y(t_n)) = \overbrace{2f(t_n, y(t_n)) - 2y'(t_n)}^{cancelam} + 2hy''(t_n) + O(h^2) = O(h)$$

e a consistência de ordem 1. No entanto, analisando a estabilidade pela equação característica $r^2 - 4r + 3 = 0$, associada à equação às diferenças $y_{n+1} = 4y_n - 3y_{n-1}$, vemos que tem raízes $r = 1$ ou $r = 3$, sendo que $r = 3$ viola a condição de estabilidade, e como o método não é estável, não é convergente (por Teorema).

4 Exercícios (2012)

4.1 Teste 1

4.1.1 Enunciado

1) Considere funções da forma $g(x) = e^x + p_n(x)$, com p_n polinómio de grau n.
a) Dado $f(x) = xe^x$, determine g interpolador de f tal que

$$(f-g)(x_k) = 0, \quad (f-g)'(x_k) = 0, \text{ para } x_0 = 0,\ x_1 = 1.$$

b) Determine um majorante para o erro $||f-g||_{C[0,1]}$ onde g é definido em a).
c) Mostre que se $\phi \in C^3[0,1]$ e $\phi(0) = \phi(1)$, $\phi'(0) = \phi'(1)$, então $||\phi'''||_{C[0,1]} \geq 12|\phi'(0)|$.

2) Mostre que se $\exp(r_{k+1} - r_k) \leq 1 + \frac{1}{k}$ com $r_1 = 0$, então $r_n \leq \log(n)$.

3) Dado $h > 0$, pretende-se uma aproximação do funcional $A(f) = f'(0) + \int_{-h}^{h} f(t)dt$, da forma

$$Q(f) = af(-h) + bf(0) + cf(h).$$

Determine Q de forma a ter pelo menos grau 2, e verifique se tem grau 3.

4) Em $[-a, a]$ determine o spline natural que verifica $s(-a) = s(a) = a$ e $s(0) = 0$.

5) Determine

$$M = \min_{a,b\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} (x^2+1)(a + bx - |x|)^2 dx$$

4.1.2 Resolução

1a) As condições podem ser escritas em termos do polinómio p_n porque

$$\begin{cases} f(0) = g(0) & \Leftrightarrow 0 = 1 + p_n(0) \\ f(1) = g(1) & \Leftrightarrow e = e + p_n(1) \\ f'(0) = g'(0) & \Leftrightarrow (x+1)e^x|_{x=0} = e^0 + p_n'(0) \\ f'(1) = g'(1) & \Leftrightarrow (x+1)e^x|_{x=1} = e^1 + p_n'(1) \end{cases} \begin{cases} p_n(0) = -1 \\ p_n(1) = 0 \\ p_n'(0) = 0 \\ p_n'(1) = e \end{cases}$$

e portanto interpolamos com p_n a função $F(x) = f(x) - e^x = (x-1)e^x$.

Construímos a tabela de diferenças generalizadas para a interpolação de Hermite para p_3 (há 4 equações)

x	:	0		0		1		1
$p_3(x)$	:	-1		-1		0		0
			$p_3[0,0] = p_3'(0) = 0$		$\frac{0-(-1)}{1-0} = 1$		$p_3[1,1] = p_3'(1) = e$	
				1		$e-1$		
					$e-2$			

resultando pela F. Newton que $p_3(x) = -1 + x^2 + (e-2)x^2(x-1)$. Portanto $g(x) = p_3(x) + e^x$ interpola f conforme pedido.

1b) O erro é

$$E(x) = (f-g)(x) = f(x) - e^x - p_n(x) = F(x) - p_n(x),$$

conforme F definido em a).

Pela fórmula de erro, com $\xi_x \in (0,1)$

$$E(x) = F[0,0,1,1,x](x-1)^2x^2 = \frac{F^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-1)^2x^2,$$

e como $F'(x) = F(x) + e^x$, temos $F^{(4)}(x) = F(x) + 4e^x = (x+3)e^x$. Conclui-se que

$$\begin{aligned} ||f-g||_\infty &= \max_{x\in[0,1]} \left| \frac{F^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-1)^2x^2 \right| \\ &\leq \frac{1}{4!} \max_{x\in[0,1]} (x+3)e^x \max_{x\in[0,1]} (1-x)^2x^2 \leq \frac{1}{4!}(4e)(\frac{1}{16}) = \frac{e}{96}, \end{aligned}$$

notando que $(1-x)x$ atinge o máximo com $x = 1/2$.

1c) Construímos de novo a tabela, escrevendo $\alpha = \phi(0)$, $\beta = \phi'(0)$,

$$\begin{array}{ccccccc} x & : & 0 & & 0 & & 1 & & 1 \\ \hline \phi(x) & : & \alpha & & \alpha & & \alpha & & \alpha \\ \hline & & & \beta & & 0 & & \beta & \\ & & & & -\beta & & \beta & & \\ & & & & & 2\beta & & & \end{array}$$

em que obtemos $\phi[0,0,1,1] = 2\beta = 2\phi'(0)$. Portanto, se $\phi \in C^3[0,1], \phi[0,0,1,1] = \phi^{(3)}(\xi)$, com $\xi \in (0,1)$.

$$||\phi^{(3)}||_{C[0,1]} = \max_{x\in[0,1]} |\phi^{(3)}(x)| \geq |\phi^{(3)}(\xi)| = 2|\phi'(0)|.$$

2. Temos $\exp(\Delta r_k) \leq 1 + \frac{1}{k}$, e assim $\Delta r_k \leq \log(1+\frac{1}{k}) = \log(\frac{k+1}{k}) = \Delta\log(k)$,

$$r_n - r_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta r_k \leq \sum_{k=1}^{n-1} \Delta\log(k) = \log(n) - \log(1),$$

e como $r_1 = 0$, obtemos $r_n \leq \log(n)$.

3. Atendendo aos nós considerados, podemos aplicar as diferenças centradas a $f'(0)$, que tem grau 2, e a Regra de Simpson, que tem grau 3, à parte integral.

$$f'(0) \approx \frac{1}{2h}(f(h) - f(-h)), \qquad \int_{-h}^{h} f(t)dt \approx \frac{2h}{6}(f(-h) + 4f(0) + f(h)),$$

A soma das duas regras é pelo menos exacta para grau 2:

$$f'(0) + \int_{-h}^{h} f(t)dt \approx (-\frac{1}{2h} + \frac{h}{3})f(-h) + \frac{4h}{3}f(0) + (\frac{1}{2h} + \frac{h}{3})f(h)) = Q(f),$$

ou seja, $a = \frac{-1}{2h} + \frac{h}{3}$, $b = \frac{4h}{3}$, $c = \frac{1}{2h} + \frac{h}{3}$.

Alternativamente poderíamos resolver o sistema linear

$$\begin{cases} A(1) = Q(1), \\ A(t) = Q(t), \\ A(t^2) = Q(t^2), \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 + 2h = a + b + c, \\ 1 + 0 = -ah + ch, \\ 0 + \frac{2}{3}h^3 = ah^2 + ch^2, \end{cases}$$

obtendo os mesmos valores para a, b, c. A fórmula não tem grau 3 (apenas a parte Simpson tem grau 3):

$$0 + 0 = A(t^3) \neq Q(t^3) = -ah^3 + ch^3 = h^2$$

4. Neste caso temos simplesmente três nós $\{-a, 0, a\}$, dois subintervalos com $h_0 = h_1 = a$, e como é spline natural $s_0'' = s_2'' = 0$, e o sistema é 1×1 apenas para o valor central

$$\frac{2}{3}a\, s_1'' = s[0, a] - s[-a, 0] = \frac{a - 0}{a - 0} - \frac{0 - a}{0 - (-a)} = 2$$

portanto $s_1'' = \frac{3}{a}$. Como

$$s_0' = s[-a, 0] - \frac{a}{6}(2s_0'' + s_1'') = -1 - \frac{a}{6}(0 + \frac{3}{a}) = -\frac{3}{2},$$

obtemos para $x \in [-a, 0]$,

$$s(x) = a - \frac{3}{2}(x + a) + \frac{1}{2a^2}(x + a)^3 = \frac{3x^2}{2a} + \frac{x^3}{2a^2}$$

e de forma semelhante $s(x) = s(-x) = \frac{3x^2}{2a} - \frac{x^3}{2a^2}$, para $x \in [0, a]$, notando que a simetria de condições força a paridade.

5. O valor a minimizar é sobre os polinómios $p_1(x) = a + bx$, sendo

$$M = \int_{-1}^{1} w(x)(f(x) - p_1(x))^2 dx = ||f - p_1||_w^2,$$

em que o peso é $w(x) = x^2 + 1 > 0$, e $f(x) = |x|$. A norma está associada ao produto interno:

$$\langle u, v \rangle_w = \int_{-1}^{1} (1 + x^2) u(x) v(x) dx,$$

e tudo se resume a um problema de mínimos quadrados

$$\begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle_w & \langle 1, x \rangle_w \\ \langle x, 1 \rangle_w & \langle x, x \rangle_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 1, |x| \rangle_w \\ \langle x, |x| \rangle_w \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & \frac{16}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{16} \\ 0 \end{bmatrix},$$

Porque:

$\langle 1, 1 \rangle_w = \int_{-1}^{1} (1 + x^2) dx = \frac{8}{3}$, $\langle 1, x \rangle_w = 0$, $\langle x, x \rangle_w = \int_{-1}^{1} (1 + x^2) x^2 dx = \frac{16}{15}$.

$\langle 1, |x| \rangle_w = \int_{-1}^{1} (1 + x^2) |x| dx = 2 \int_{0}^{1} (1 + x^2) x dx = \frac{3}{2}$, $\langle x, |x| \rangle_w = 0$.

Assim, o mínimo é obtido com $p_1(x) = \frac{9}{16}$, e temos

$$M = \int_{-1}^{1} (1 + x^2)(|x| - \tfrac{9}{16})^2 dx = \tfrac{16}{15} - 2\tfrac{27}{32} + \tfrac{27}{32} = \tfrac{107}{408}.$$