Exercícios de Análise Numérica Funcional e Optimização

Carlos J. S. Alves

Instituto Superior Técnico (2012)

Contents

1 Exercícios de 2010

1.1 Teste 1 (2010/11)

1.1.1 Enunciado

1)$_{[3.0]}$ Seja C_s o espaço vectorial $C[1,R]$ com a norma

$$||u||_{\infty;s} = \max_{x\in[1,R]} |x^s u(x)|.$$

a) Quais os $s \in \mathbb{R}$ onde $||\cdot||_{\infty;s}$ são normas equivalentes e C_s são espaços de Banach?
b) Defina condições em K, s para que $||A||_{\mathcal{L}(C_s,C_s)} < 1$, onde A é o operador

$$(Au)(x) = \int_1^R y^s K(x,y)u(y)dy,$$

e K é uma função contínua em $[1,R]^2$.

2)$_{[4.0]}$ Seja H espaço de Hilbert (real), e $a, b \in H$. Considere a equação em $u \in H$:

$$(1 - \langle a, u\rangle)\, u = b \qquad\qquad (*)$$

a) Mostre que se $||a||\,||b|| < \frac{1}{4}$, a sucessão (u_n) definida por

$$u_{n+1} = \langle a, u_n\rangle\, u_n + b,$$

converge para uma solução de $(*)$, quando $2||a||\,||u_0|| \leq c < 1$.
b) Sendo $H = H^1(0,1)$, e nas condições de a), justifique que u_n converge para uma solução

$$u = c(r)b,$$

apresentando $c(r)$, uma constante dependente de $r = \int_0^1 (a(t)b(t) + a'(t)b'(t))\, dt$.

3)$_{[3.0]}$
a) Determine $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ tal que $\phi(x) = \alpha_2|x|x + \alpha_1|x| + \alpha_0 x$ verifique $\phi''' = \delta$.
b)[1] Seja $F(x) = f(x) + Ag'(Bx)$, em que g é periódica ($g(x+T) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$), e A, B constantes ($B, T \neq 0$). Determine ϵ tal que

$$(F * \mu_\epsilon)(x) = f(x+\xi),$$

com $\xi \in [-\epsilon, \epsilon]$, e onde $\mu_\epsilon(x) = \begin{cases} (2\epsilon)^{-1}, & |x| < \epsilon \\ 0, & |x| \geq \epsilon \end{cases}$.

[1]Por erro, foi colocado g e não g' na definição de F.

1.1.2 Resolução

1a) Basta ver que as normas são todas equivalentes à norma do máximo (caso $s = 0$).

Se $s > 0$

$$||u||_{\infty;s} = \max_{x\in[1,R]} |x^s u(x)| \leq \max_{x\in[1,R]} |x^s|\, ||u||_\infty \leq R^s ||u||_\infty$$

$$||u||_{\infty;s} = \max_{x\in[1,R]} \underbrace{|x^s|}_{\geq 1} |u(x)| \geq \max_{x\in[1,R]} |u(x)| = ||u||_\infty$$

e se $s < 0$ (de forma semelhante)

$$R^s ||u||_\infty \leq ||u||_{\infty;s} = \max_{x\in[1,R]} \underbrace{|x^s|}_{\leq 1} |u(x)| \leq ||u||_\infty.$$

Como as normas são equivalentes e $C[1, R]$ é completo com a norma do máximo, as sucessões de Cauchy convergentes na norma do máximo são as mesmas em qualquer C_s, que são por isso também completos e todos são espaços de Banach.

1b)

$$||A||_{\mathcal{L}(C_s,C_s)} = \sup_{v\neq 0} \frac{||Av||_{\infty;s}}{||v||_{\infty;s}} = \sup_{v\neq 0} \frac{\max_{x\in[1,R]} |x^s \int_1^R K(x,y) y^s v(y) dy|}{||v||_{\infty;s}}$$

como $|y^s v(y)| \leq ||v||_{\infty;s}$ obtemos

$$||A||_{\mathcal{L}(C_s,C_s)} \leq \max_{x\in[1,R]} x^s \int_1^R |K(x,y)| dy \leq (R-1) \max_{x,y\in[1,R]} |x^s K(x,y)|$$

Definindo $||K||_\infty = \max_{x,y\in[1,R]} |K(x,y)|$:

- se $s > 0$, A será contractivo se $(R-1)R^s ||K||_\infty < 1$
- se $s \leq 0$, A será contractivo se $(R-1)||K||_\infty < 1$,

2a) Definimos $G(u) = \langle a, u\rangle\, u + b$. Seja $S = \bar{B}(0, \frac{c}{2||a||})$, bola fechada em H, que é um convexo (não trivial $c > 0$).

Aplicamos o Teorema do Ponto Fixo, com a derivação de Fréchet.

- Contractividade em S. Para calcular $G'_u(h)$, obtemos

$$G(u+h) - G(u) = \langle a, u+h\rangle\, (u+h) - \langle a, u\rangle\, u = \langle a, h\rangle\, u + \langle a, u\rangle\, h + \langle a, h\rangle\, h$$

e portanto $G'_u(h) = \langle a, h\rangle\, u + \langle a, u\rangle\, h$, como pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} ||G'_u(h)|| &= ||\, \langle a, h\rangle\, u + \langle a, u\rangle\, h|| \leq |\, \langle a, h\rangle\, |\, ||u|| + |\, \langle a, u\rangle\, |\, ||h|| \\ &\leq ||a||\, ||h||\, ||u|| + ||a||\, ||u||\, ||h|| = 2||a||\, ||u||\, ||h|| \end{aligned}$$

obtemos

$$||G'_u|| = \sup_{h\neq 0} \frac{||G'_u(h)||}{||h||} \leq \sup_{h\neq 0} \frac{2||a||\,||u||\,||h||}{||h||} = 2||a||\,||u|| < 1,$$

quando $||u|| \leq \frac{c}{2||a||}$, pois $u \in S$.

- Invariância em S. Dado $u \in S$, vejamos que $G(u) \in S$, ou seja,

$||G(u)|| \leq ||a||\,||u||^2 + ||b|| < ||a||\,(\frac{c}{2||a||})^2 + ||b|| = \frac{c^2}{4||a||} + ||b|| \leq \frac{c^2}{4||a||} + \frac{1}{4||a||} \leq \frac{1}{2||a||}$, pois $||b|| \leq \frac{1}{4||a||}$, $c < 1$.

Pelo Teorema do Ponto Fixo, $\exists.^1 u \in S : u = G(u) = \langle a, u\rangle\, u + b$, e temos a convergência do método do ponto fixo quando $u_0 \in S$ (ou seja, quando $2||a||\,||u_0|| \leq c < 1$).

$--$

2b) Primeiro notamos que $r = \langle a, b\rangle_{H^1(a,b)}$.

De (*) temos $\langle a, u\rangle = \langle a, \langle a, u\rangle\, u + b\rangle = \langle a, u\rangle\,\langle a, u\rangle + \langle a, b\rangle$, escrevendo $x = \langle a, u\rangle$ temos

$$x = x^2 + r \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - r}$$

e assim $(1-x)u = b \Leftrightarrow (\frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} - r})u = b$. Como $r = \langle a, b\rangle \leq ||a||\,||b|| < \frac{1}{4}$, o valor de x é real, e temos

$$u = \frac{2}{1 \mp \sqrt{1-4r}} b.$$

O valor é $c(r) = \frac{2}{1+\sqrt{1-4r}}$, mais próximo de zero, pois S definido em a) contém 0.

$--$

3a) Usando o cálculo simbólico já conhecido, obtemos

$$\phi'(x) = \alpha_2(\operatorname{sgn}(x)x + |x|) + \alpha_1 \operatorname{sgn}(x) + \alpha_0,$$

e notamos que $\operatorname{sgn}(x)x = |x|$. Portanto

$$\phi''(x) = 2\alpha_2(|x|)' + 2\alpha_1\delta = 2\alpha_2 \operatorname{sgn}(x) + 2\alpha_1\delta,$$

e assim

$$\phi''' = 4\alpha_2\delta + 2\alpha_1\delta' = \delta,$$

quando $4\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = 0$, para qualquer α_0.

Nota 1: $\langle \delta', v\rangle = -\langle \delta, v'\rangle = -v'(0)$ não é anulável doutra forma.

Nota 2: Para quem seguiu outros caminhos... e chegou a $\phi''' = 6\alpha_2\delta + 2(\alpha_2 x + \alpha_1)\delta'$, não poderia fazer $\alpha_2 = \frac{1}{6}$ e daí $\alpha_1 = -\frac{1}{6}x$, pois usou antes α_1 como constante... O resultado seria o mesmo, mas porque $x\delta' = -\delta$, já que:

$\langle x\delta', v\rangle = \langle \delta', xv\rangle = -\langle \delta, (xv)'\rangle = -\langle \delta, v + xv'\rangle = -\langle \delta, v\rangle + 0$, pois $xv'|_{x=0} = 0$

$--$

3b)

$$\begin{aligned}
(F * \mu_\epsilon)(x) &= \int_{\mathbb{R}} (f(y) + Ag'(By))\mu_\epsilon(x-y)dy = \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} (f(y) + Ag'(By))\frac{1}{2\epsilon}dy \\
&= \frac{1}{2\epsilon}\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} f(y)dy + A\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} g'(By))dy = f(x+\xi) + \frac{A}{B}[g(By)]_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \\
&= f(x+\xi) + \frac{A}{B}\left(g(Bx+B\epsilon) - g(Bx-B\epsilon)\right)
\end{aligned}$$

é necessário que $g(Bx+B\epsilon) = g(Bx-B\epsilon)$, para qualquer x. Pela periodicidade $T = 2B\epsilon$, ou seja $\epsilon = \frac{T}{2B}$.

1.2 Exame 1 (2010/11)

1.2.1 Primeira Parte

1.1)$_{[4.0]}$ Considere a sucessão de funções definida por

$$u_{n+1}(t) = \int_0^{2\pi} \sin(\frac{t+s}{2}) \cos(\beta u_n(s)) ds,$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$ é um parâmetro constante.

a) Considere em $C[0, 2\pi]$ o operador A que se define nessa iteração $u_{n+1} = Au_n$. Calcule a derivada de Fréchet de A.

b) Determine condições sobre β de forma a que A seja uma contracção, e apresente uma estimativa de erro a priori, calculando $||u_1 - u_0||_\infty$, começando com $u_0 = 0$.

1.2)$_{[3.0]}$ Seja H espaço de Hilbert (real), com $\langle a, b \rangle = 0$. Dado $v_0 \in H$ inicial, considere a sucessão

$$v_{n+1} = \langle v_n, a \rangle\, a + \langle v_n, b \rangle\, b.$$

a) Mostre que $v_n = \langle v_0, a \rangle\, ||a||^{2n-2} a + \langle v_0, b \rangle\, ||b||^{2n-2} b$, se $n \geq 1$, e discuta a convergência.

b) Sendo $H = H^1(0, 1)$, imponha condições sobre a e b tais que $||v_n - z||_{H^1(0,1)} \to 0$, e

$$z(x) = \int_0^1 z(t)\,(a(t)a(x) + b(t)b(x))\, dt + \int_0^1 z'(t)\,(a'(t)a(x) + b'(t)b(x))\, dt.$$

1.3)$_{[3.0]}$ Mostre que a função $u(x) = \frac{1}{2} e^x |x|$ é solução generalizada do problema

$$\int_{\mathbb{R}} (u''(x) - 2u'(x) + u(x))\, v(x) dx = v(0),\ \forall v \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$

e que $y = u * f$ é uma solução particular de $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = f(x)$.

1.2.2 Segunda Parte

2.1)$_{[2.5]}$ Com $a > 1$, considere a forma quadrática

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \mathbf{x} - x_1 + x_3 - 3,\ \text{com } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

a) Com $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, $a = 2$, aplicando o método dos gradientes conjugados determine o ponto de mínimo de f.

b) Com $a > 7$, qualquer que seja a iterada inicial, determine $\beta \in (0, 1)$ tal que o erro do método do gradiente descresça mais rapidamente que $O(\beta^n)$.

2.2)$_{[4.5]}$ Seja $f(x_1, x_2) = e^{2x_1} + e^{-x_1-x_2} + 2x_2$.

a) Determine e mostre que há um e um só mínimo global em $\mathbb{R}^2$.

b) Com $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ apresente o sistema para obter $\mathbf{x}^{(1)}$ pelo método de Levenberg-Marquardt.

c) Com $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ compare $\mathbf{x}^{(1)}$ obtido pelo método do gradiente e pelo método de Fletcher-Reeves (GC).

2.3)$_{[3.0]}$ Aplicando as condições de Karush-Kuhn-Tucker, determine os pontos de mínimo da função

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{-(x_1+x_2+x_3)} + x_1 - x_3$$

sujeitos às restrições:

a) $x_3 = 0,\ x_1 \leq x_2 \leq 0$;

b) $x_1 = x_3 - 1,\ x_2 \leq x_1,\ x_2 \leq 0$.

1.2.3 Primeira Parte - Resolução

1.1a) É imediato que

$$Au(t) = \int_0^{2\pi} \sin(\frac{t+s}{2})\cos(\beta u(s))ds,$$

define ainda uma função contínua. De um modo geral, escrevendo $K(t,s) = \sin(\frac{t+s}{2}); V(x) = \cos(\beta x)$, temos

$$\begin{aligned}(A(u+h) - A(u))(t) &= \int_0^{2\pi} K(t,s)(V(u(s)+h(s)) - V(u(s))ds \\ &= \int_0^{2\pi} K(t,s)(V'(u(s))h(s) + \tfrac{1}{2}V''(\xi)h(s)^2)ds\end{aligned}$$

pelo que temos $A'_u h(t) = \int_0^{2\pi} K(t,s)V'(u(s))h(s)ds$, já que

$$||A(u+h) - A(u) - A'_u h||_\infty \leq \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} ||K||_\infty ||V''||_\infty ||h||_\infty^2 ds = O(||h||_\infty^2).$$

Como $V'(x) = -\beta\sin(\beta x)$, obtemos

$$A'_u h(t) = -\beta\int_0^{2\pi} \sin(\frac{t+s}{2})\sin(\beta u(s))h(s)ds,$$

— —

1.1b) A norma de A'_u em $\mathcal{L}(C[0,2\pi])$ é dada por

$$\begin{aligned}||A'_u||_{\mathcal{L}} &= \sup_{v\neq 0}\frac{||A'_u v||_\infty}{||v||_\infty} \leq \sup_{v\neq 0}\frac{|\beta|\int_0^{2\pi}||\sin(\frac{t+s}{2})\sin(\beta u)||_\infty ||v||_\infty ds}{||v||_\infty} \\ &\leq \sup_{v\neq 0}\tfrac{2\pi|\beta|\ ||v||_\infty}{||v||_\infty} = 2\pi|\beta|\end{aligned}$$

Assim, garantimos que A é uma contracção em $C[0,2\pi]$ se $2\pi|\beta| < 1 \Leftrightarrow |\beta| < \frac{1}{2\pi}$. Nesse caso, e como $u_0 = 0$,

$$u_1(t) = Au_0(t) = \int_0^{2\pi}\sin(\frac{t+s}{2})ds = -2\cos(\frac{t}{2}+\pi) + 2\cos(\frac{t}{2}) = 4\cos(\frac{t}{2})$$

obtém-se $||u_1 - u_0||_\infty = 4$, logo $||e_n|| \leq 4\frac{(2\pi|\beta|)^n}{1-2\pi|\beta|}$.

— —

1.2a) Por indução, v_1 verifica. Provamos para v_{n+1} assumindo a fórmula para v_n.

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= \langle v_n, a\rangle a + \langle v_n, b\rangle b \\ &= \left\langle \langle v_0, a\rangle ||a||^{2n-2}a, a\right\rangle a + 0 + 0 + \left\langle \langle v_0, b\rangle ||b||^{2n-2}b, b\right\rangle b \\ &= \langle v_0, a\rangle ||a||^{2n}a + \langle v_0, b\rangle ||b||^{2n}b\end{aligned}$$

Daqui conclui-se a convergência se $||a||, ||b|| \leq 1$, sendo para zero se $||a||, ||b|| < 1$, e quando $||a||, ||b|| = 1$, o valor v_1 é logo a solução.

$\overline{1.2}$**b)** Notamos que $z = \langle z, a\rangle_{H^1(a,b)}\, a + \langle z, b\rangle_{H^1(a,b)}\, b$, porquanto é o limite de a), obtido quando $||a||_{H^1}, ||b||_{H^1} = 1$, ou seja, quando

$$\int_0^{2\pi} a(t)^2 + a'(t)^2 dt = \int_0^{2\pi} b(t)^2 + b'(t)^2 dt = 1.$$

$\overline{1.3}$**)** A expressão significa que $u'' - 2u' + u = \delta$, o que pode ser verificado facilmente (com $u(x) = \frac{1}{2}e^x|x|$):

$$u'(x) = \tfrac{1}{2}e^x|x| + \tfrac{1}{2}e^x\mathrm{sgn}(x) \implies u''(x) = \tfrac{1}{2}e^x|x| + \tfrac{1}{2}e^x\mathrm{sgn}(x) + \tfrac{1}{2}e^x\mathrm{sgn}(x) + e^x\delta(x)$$

e notamos que $e^x\delta(x) = \delta(x)$.

Logo $u'' - 2u' + u = \frac{1}{2}e^x|x| + e^x\mathrm{sgn}(x) + \delta(x) - (e^x|x| + e^x\mathrm{sgn}(x)) + \frac{1}{2}e^x|x| = \delta(x)$.

Consequentemente u é uma solução fundamental da equação diferencial e temos $y = u * f$ como solução particular.

NOTA: Alternativamente (e *mais complicado*) servindo para ilustrar como o cálculo simbólico simplifica as contas:

- Considerávamos $v \in C^\infty$ com $\mathrm{supp}(v) \subset (-R, R)$, e assim $v(\pm R) = v'(\pm R) = 0$,

$$\begin{aligned}
2\int_{\mathbb{R}} u'(x)v(x)dx &= -\int_{\mathbb{R}} e^x|x|v'(x)dx = \int_{-R}^0 e^x x v'(x)dx - \int_0^R e^x x v'(x)dx \\
&= -\int_{-R}^0 (e^x x)'v(x)dx + \int_0^R (e^x x)'v(x)dx + [e^x x v(x)]_{-R}^0 - [e^x x v(x)]_0^R \\
&= -\int_{-R}^0 e^x(x+1)v(x)dx + \int_0^R e^x(x+1)v(x)dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} u''(x)v(x)dx &= \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^x|x|v''(x)dx = -\tfrac{1}{2}\int_{-R}^0 e^x x v''(x)dx + \tfrac{1}{2}\int_0^R e^x x v''(x)dx \\
&= -\tfrac{1}{2}\left(\int_{-R}^0 (e^x x)''v(x)dx + [e^x x v'(x)]_{-R}^0 - [(e^x x)'v(x)]_{-R}^0\right) \\
&\quad +\tfrac{1}{2}\left(\int_0^R (e^x x)''v(x)dx + [e^x x v'(x)]_0^R - [(e^x x)'v(x)]_0^R\right) \\
&= -\tfrac{1}{2}\left(\int_{-R}^0 (e^x x)''v(x)dx + 0 - v(0)\right) + \tfrac{1}{2}\left(\int_0^R (e^x x)''v(x)dx + 0 + v(0)\right) \\
&= -\tfrac{1}{2}\int_{-R}^0 e^x(x+2)v(x)dx + \tfrac{1}{2}\int_0^R e^x(x+2)v(x)dx + v(0)
\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} u''(x)v(x) + u(x)v(x)dx &= -\tfrac{1}{2}\int_{-R}^{0} e^x(x+2)v(x)dx + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{R} e^x(x+2)v(x)dx + v(0) \\
&\quad -\tfrac{1}{2}\int_{-R}^{0} e^x xv(x)dx + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{R} e^x xv(x)dx \\
&= -\tfrac{1}{2}\int_{-R}^{0} e^x(2x+2)v(x)dx + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{R} e^x(2x+2)v(x)dx + v(0)
\end{aligned}$$

e a diferença deste com $2\int_{\mathbb{R}} u'(x)v(x)dx$ dá apenas $v(0)$, ou seja:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(u''(x) - 2u'(x) + u(x)\right) v(x)dx = v(0),\ \forall v \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

1.2.4 Segunda Parte - Resolução

2.1a) A matriz é simétrica e definida positiva, pelo T. Gerschgorin $\lambda \in [2,6] \cup [2,4] \cup [a-1, a+1] \subset]0,\infty[$.

A solução resulta de resolver o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e aplicando o método temos $\mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} = (1, 0, -1)$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha_0 \mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{0} + \frac{\mathbf{r}^{(0)} \cdot \mathbf{d}^{(0)}}{\mathbf{d}^{(0)} \cdot A\mathbf{d}^{(0)}} \mathbf{d}^{(0)} = \frac{2}{4}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

agora $\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(1)} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$; $\mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{r}^{(1)} + \frac{3/4}{2}\mathbf{d}^{(0)} = (-\frac{1}{2} + \frac{3}{8}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{3}{8})$, e ainda

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \alpha_1 \mathbf{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \frac{12}{43} \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{43} \\ -\frac{6}{43} \\ -\frac{32}{43} \end{bmatrix}$$

com $\mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(2)} = (\frac{1}{43}, -\frac{2}{43}, \frac{1}{43})$; $\mathbf{d}^{(2)} = \frac{6}{1849}(7, -15, 6)$, e finalmente a solução exacta, que é o mínimo:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(2)} + \alpha_2 \mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{20}{43} \\ -\frac{6}{43} \\ -\frac{32}{43} \end{bmatrix} + \frac{43}{114} \begin{bmatrix} \frac{42}{1849} \\ -\frac{90}{1849} \\ -\frac{36}{1849} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{19} \\ -\frac{3}{19} \\ -\frac{14}{19} \end{bmatrix}$$

2.1b) Os valores próprios são reais (matriz simétrica), e pelo T. Gerschgorin, o mínimo varia $2 \le \lambda_m \le 6$, enquanto o máximo $6 < a - 1 \le \lambda_M \le a + 1$, com $a > 7$.

Portanto $\left|\frac{\lambda_M-\lambda_m}{\lambda_M+\lambda_m}\right| \leq \frac{\lambda_M-2}{\lambda_M+2} < 1$, e $\frac{\lambda_M-2}{\lambda_M+2}$ é crescente como função de λ_M, logo no máximo temos $\beta = \frac{(a+1)-2}{(a+1)+2} = \frac{a-1}{a+3} < 1$.

$\overline{\mathbf{2}}.\overline{\mathbf{2}}$**a)** Temos $\nabla f(x) = (2e^{2x_1} - e^{-x_1-x_2}, -e^{-x_1-x_2}+2) = (0,0)$ quando $2e^{2x_1} = e^{-x_1-x_2}$, $2 = e^{-x_1-x_2}$, o que implica $e^{2x_1} = 1 \Leftrightarrow x_1 = 0$. De onde, $2 = e^{0-x_2}$, $x_2 = -\log 2$. Conclui-se assim que há um só ponto crítico, $z = (0, -\log 2)$, e verifica-se ser ponto de mínimo estrito, porque

$$H_f(z) = \left[\begin{array}{cc} 4e^{2x_1} + e^{-x_1-x_2} & e^{-x_1-x_2} \\ e^{-x_1-x_2} & e^{-x_1-x_2} \end{array}\right]_{x=(0,-\log 2)} = \left[\begin{array}{cc} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{array}\right]$$

é uma matriz definida positiva.

$\overline{\mathbf{2}}.\overline{\mathbf{2}}$**b)** O método de Levenberg-Marquardt

$$\left(\epsilon_n I + H_f(\mathbf{x}^{(0)})\right)\Delta\mathbf{x}^{(0)} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(0)})$$

e obtemos $H_f(\mathbf{0}) = \left[\begin{array}{cc} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right]$, $\nabla f(\mathbf{0}) = (1,1)$, logo (para $\epsilon > 0$ que mantém a matriz definida positiva):

$$\left[\begin{array}{cc} 5+\epsilon & 1 \\ 1 & 1+\epsilon \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \end{array}\right] = -\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right]$$

2.2c) Pelo método do gradiente $x^{(1)} = x^{(0)} - \omega\nabla f(x^{(0)}) = -\omega\nabla f(\mathbf{0}) = -\omega(1,1)$

$$\phi(\omega) = f(-\omega,-\omega) = e^{-2\omega} + e^{2\omega} - 2\omega$$

$\phi'(\omega) = -2e^{-2\omega} + 2e^{2\omega} - 2 = 0 \Leftrightarrow 4\sinh(2\omega) = 2 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}\sinh^{-1}(\frac{1}{2})$.

Portanto, pelo método do gradiente: $x^{(1)} = -\frac{1}{2}\sinh^{-1}(\frac{1}{2})(1,1) = -0.2406..(1,1)$.

Pelo método do Gradiente Conjugado (Fletcher-Reeves), temos a mesma direcção de descida $d^{(0)} = -\nabla f(\mathbf{0}) = (-1,-1)$, e o resultado seria o mesmo.

Efectuando os cálculos directamente pela fórmula, ou seja sem procura unidireccional, obtemos:

$$\alpha_0 = \frac{r^{(0)} \cdot d^{(0)}}{d^{(0)}.H_f(0).d^{(0)}} = \frac{2}{8},\ x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 d^{(0)} = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$$

ambos os valores são semelhantes, mas longe da solução $z = (0, -\log 2)$. (... obteríamos só $||e^{(9)}|| < 10^{-4}$)

$\overline{\mathbf{2}}.\overline{\mathbf{3}}$**a)** Simplificamos usando as condições de igualdade, $c_3(x) = x_3 = 0$, usando apenas as condições de desigualdade $c_1(x) = x_2 - x_1 \geq 0$, $c_2(x) = -x_2 \geq 0$, pelo que o Lagrangiano fica

$$\mathcal{L}_f(x,\lambda) = e^{-(x_1+x_2)} + x_1 - \lambda_1(x_2 - x_1) + \lambda_2 x_2,$$

e temos as condições KKT

$$\nabla \mathcal{L}_f(x,\lambda) = (-e^{-(x_1+x_2)} + 1 + \lambda_1, -e^{-(x_1+x_2)} - \lambda_1 + \lambda_2) = (0,0),$$

com $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1(x_2 - x_1) = 0$, $\lambda_2 x_2 = 0$.

– caso $\lambda_1, \lambda_2 = 0$, obtemos condições livres $(-e^{-(x_1+x_2)} + 1, -e^{-(x_1+x_2+x_3)}) = (0,0)$, mas impossíveis.

– caso $\lambda_2 \neq 0$, $(-e^{-(x_1+x_2)} + 1, -e^{-(x_1+x_2)} + \lambda_2) = (0,0)$, implica $1 = e^{-(x_1+x_2)} = \lambda_2 \geq 0$. Assim $x_2 = 0$, logo $e^{-x_1} = 1 \Rightarrow x_1 = 0$.

O ponto de mínimo com as restrições é $z = (0,0)$. Aí as restrições activas são c_1e c_2 com gradientes $(-1,1), (0,-1)$, linearmente independentes (LICQ), logo $F_2 = \{0\}$, e será estrito, pelas condições suficientes de segunda ordem.

$\overline{\mathbf{2.3b)}}$ De forma semelhante $c_3(x) = x_1 - x_3 + 1 = 0$, usando apenas as condições de desigualdade $c_1(x) = x_1 - x_2 \geq 0$, $c_2(x) = -x_2 \geq 0$, pelo que o Lagrangiano fica

$$\mathcal{L}_f(x,\lambda) = e^{-(2x_1+x_2+1)} - 1 - \lambda_1(x_1 - x_2) + \lambda_2 x_2,$$

e temos

$$\nabla \mathcal{L}_f(x,\lambda) = (-2e^{-(2x_1+x_2+1)} - \lambda_1, -e^{-(2x_1+x_2+1)} + \lambda_1 + \lambda_2).$$

Reparamos imediatamente que $-2e^{-(2x_1+x_2+1)} - \lambda_1 = 0$ implica $\lambda_1 < 0$, sempre impossível (haverá ponto de ínfimo no infinito...).

1.3 Exame 2 (2010/11)

1.3.1 Primeira Parte

1.1)$_{[3.0]}$ Com $u(0) = 0$, considere a equação diferencial

$$u'(t) = \sin\left(v(t)u(t)\right)$$

onde $v \in C[0,T]$.

a) Mostre que sendo $(A_v u)(t) = \int_0^t \sin(v(s)u(s))ds$, a sucessão $u_{n+1} = A_v(u_n)$ se convergir, converge para a solução da equação diferencial.

b) Apresente a derivada de Fréchet do operador A_v em $C[0,T]$, e estabeleça condições para a convergência da sucessão definida em a).

1.2)$_{[3.0]}$ Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = z - 1 \\ x^3 - x + 2y^3 + z^3 = 1 \\ x^3 + y^2 - y + z^2 = 1 \end{cases}$$

Determine uma aproximação da solução aplicando o Método de Broyden, depois da inicialização pelo Método de Newton com o vector nulo.

1.3)$_{[1.5]}$ Sendo $\mathbf{v} = (1, \sqrt{2}, \cdots, \sqrt{N})$, calcule a norma da sua TFD, $||\mathcal{F}\mathbf{v}||_2$.

1.4)$_{[2.5]}$ Considere a função $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < a \\ f_2(x), & x > a \end{cases}$ com $f_1 \in C^1]-\infty, a]$, $f_2 \in C^1[a, +\infty[$.

a) Mostre que a derivada f' (no sentido generalizado) verifica

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)v(x)dx = (f_2(a) - f_1(a))v(a) + \int_{-\infty}^{0} f_1'(x)v(x)dx + \int_0^\infty f_2'(x)v(x)dx, \ \forall v \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$

b) Justifique que a equação diferencial $u''-u = f'$, com as condições $u(a-1) = u(a+1) = 0$ tem uma e uma só solução em $H_0^1(a-1, a+1)$.

1.3.2 Segunda Parte

2.1)$_{[1.5]}$ Sejam $y^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega_1 d_1^{(k)}$ e $z^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega_2 d_2^{(k)}$ iteradas obtidas por dois métodos de descida diferentes, partindo da mesma iterada anterior $x^{(k)}$. Mostre que há um vector $d_3^{(k)} = \alpha d_1^{(k)} + (1-\alpha)d_2^{(k)}$, tal que $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega d_3^{(k)}$ será ainda método de descida.

2.2)$_{[2.5]}$ Seja $f(x, y, z) = e^{2x} - x + 2y + z^2 + e^{-y-z}$.

a) Determine e mostre que há um e um só mínimo global em $\mathbb{R}^3$.

b) Iniciando em zero, determine a primeira iterada pelo método de Newton, e analise a minimização por essa direcção de descida.

2.3)$_{[3.0]}$ Considere a forma quadrática

$$f(x, y, z) = 5x^2 - 4xz + y^2 + 3z^2 + x - y - 1.$$

a) Aplicando o método dos gradientes conjugados determine o ponto de mínimo de f.

b) Se colocar a restrição $xyz \leq 0$, qual será o novo ponto de mínimo? Essa restrição será activa?

2.4)$_{[3.0]}$

a) Determine os pontos de mínimo de $f(x, y, z) = \frac{x^2+y^2+z^2-1}{y^2+1}$ sujeitos às restrições $y^2+z^2 = 2$, e $|xy| \leq 1$, e comente sobre as restrições activas.

b) Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, vectores $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$, e uma matriz $\mathbf{A}$, mostre que a função $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{b} + \alpha$ tem ponto de mínimo sujeito às restrições $\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{d} \geq 0$, se o sistema $\mathbf{A}^\top \mathbf{y} = \mathbf{b}$ tiver solução com componentes $y_k \geq 0$.

1.3.3 Primeira Parte - Resolução

1.1a) Integrando a equação diferencial temos para $t \in [0,T]$

$$\int_0^t u'(s)ds = \int_0^t \sin(v(s)u(s))ds \Leftrightarrow u(t) = \int_0^t \sin(v(s)u(s))ds = (A_v u)(t)$$

por isso trata-se do ponto fixo da A_v. A sucessão $u_{n+1} = A_v u_n$ se convergir, converge para o ponto fixo $u = A_v u$.

1.1b) Consideramos $A : C[0,T] \to C[0,T]$

$$(A_v(u+h) - A_v(u))(t) \;=\; \int_0^t \sin(v(s)(u(s)+h(s)))ds - \int_0^t \sin(v(s)u(s))ds,$$

e como $\sin(vu+vh) - \sin(vu) = \cos(vu)vh - \frac{1}{2}\sin(\xi)(vh)^2$, obtemos

$$\begin{aligned}(A_v(u+h) - A_v(u))(t) &= \int_0^t \cos(v(s)u(s))v(s)h(s)ds - \tfrac{1}{2}\int_0^t \sin(\xi)v(s)h(s)^2 ds,\\ &= A'_{v,u}(h)(t) + O(||h||_\infty^2)\end{aligned}$$

pois $|\int_0^t \sin(\xi)v(s)h(s)^2 ds| \le T||v||_\infty ||h||_\infty^2$é $O(||h||_\infty^2)$, e a derivada é o operador linear

$$A'_{v,u}(h)(t) = \int_0^t \cos(v(s)u(s))v(s)h(s)ds$$

A norma de $A'_{v,u}$ em $\mathcal{L}(C[0,T])$ é majorada por

$$||A'_{v,u}||_{\mathcal{L}} \;=\; \sup_{h\neq 0} \frac{||A'_{v,u}h||_\infty}{||h||_\infty} \le \sup_{h\neq 0} \frac{\int_0^T ||\cos(..)||_\infty ||v||_\infty ||h||_\infty ds}{||h||_\infty} \le T||v||_\infty$$

Assim, garantimos que A_v é uma contracção em $C[0,T]$ se $||v||_\infty T < 1$, não dependendo de u, e pelo Teorema do Ponto Fixo aplicado a todo o espaço de Banach, ou seja, a $C[0,T]$, obtemos a convergência.

1.2a) O sistema de equações escreve-se na forma

$$f(x,y,z) = (x^2 - 2y^2 - z + 1, x^3 - x + 2y^3 + z^3 - 1, x^3 + y^2 - y + z^2 - 1) = (0,0,0)$$

e a matriz jacobiana será

$$J_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & 4y & -1 \\ 3x^2-1 & 6y^2 & 3z^2 \\ 3x^2 & 2y-1 & 2z \end{bmatrix} \Rightarrow J_f(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e como $f(0,0,0) = (1,-1,-1)$ a primeira iterada de Newton dá

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{0} + \Delta\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Calculamos agora $\mathbf{x}^{(2)}$ pelo método de Broyden. Começando por notar que $f(1,-1,-1) = (1,-3,-1)$

— —

1.3) Temos $||\mathcal{F}\mathbf{v}||_2 = \sqrt{N}||\mathbf{v}||_2 = \sqrt{N}(1^2 + \sqrt{2}^2 + \cdots + \sqrt{N}^2) = \sqrt{N}\sum_{k=1}^{N} k = \sqrt{N}\frac{N(N+1)}{2}$.

— —

1.4)

a) Consideramos uma função $v \in C^\infty$ com $\text{supp}(v) \subset (-R,R) \ni a$, logo $v(\pm R) = 0$, e assim

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f'(x)v(x)dx &= -\int_{\mathbb{R}} f(x)v'(x)dx = -\int_{-R}^{a} f_1(x)v'(x)dx - \int_{a}^{R} f_2(x)v'(x)dx \\ &= -[f_1 v]_{-R}^{a} + \int_{-R}^{a} f_1'(x)v(x)dx - [f_2 v]_a^R + \int_a^R f_2'(x)v(x)dx \\ &= -f_1(a)v(a) + \int_{-\infty}^{a} f_1'(x)v(x)dx + f_2(a)v(a) + \int_a^\infty f_2'(x)v(x)dx \end{aligned}$$

b) O resultado anterior mostra que f'define uma forma linear, com $v \in H_0^1(a-1,a+1)$:

$$F(v) = \langle f', v\rangle_{L^2} = (f_2(a) - f_1(a))v(a) + \int_{a-1}^{a} f_1'(x)v(x)dx + \int_a^{a+1} f_2'(x)v(x)dx,$$

logo como $\langle u'' - u, v\rangle_{L^2} = -\langle u', v'\rangle_{L^2} - \langle u, v\rangle_{L^2} = -\langle u, v\rangle_{H^1}$, pelo Teorema de Riesz $\exists^1 u \in H_0^1(a-1,a+1)$:$\langle u, v\rangle_{H^1} = -F(v)$.

1.3.4 Segunda Parte - Resolução

2.1) Basta reparar que podemos escolher $\alpha = 1$, obtendo-se $d_3^{(k)} = d_1^{(k)}$, pelo que $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega d_1^{(k)}$ é igual a $y^{(k+1)}$ se $\omega = \omega_1$e isso garante a descida pelo primeiro método, e de forma semelhante, considerando $\alpha = 0$, teríamos $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega d_2^{(k)}$ igual a $z^{(k+1)}$ se $\omega = \omega_2$e isso garantiria a descida pelo segundo método. Assim poderá optar-se pelo que leve a maior descida, incluindo ainda os casos intermédios com $\alpha \in (0,1)$.

$\overline{2.2}$a) Temos $\nabla f(x) = (2e^{2x} - 1,\, 2 - e^{-y-z},\, 2z - e^{-y-z}) = (0,0,0)$ quando $2e^{2x} = 1$, $2 = e^{-y-z}$, $2z = e^{-y-z}$.

Isto implica $2e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\log(2)$, $2 = e^{-y-z} = 2z \Leftrightarrow z = 1$, $y = -1 - \log 2$.

Conclui-se assim que há um só ponto crítico $\mathbf{w} = (-\frac{1}{2}\log(2), -1-\log 2, 1)$, e verifica-se ser ponto de mínimo estrito, porque

$$H_f(\mathbf{w}) = \left[\begin{array}{ccc} 4e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-y-z} & e^{-y-z} \\ 0 & e^{-y-z} & 2+e^{-y-z} \end{array}\right]_{(x,y,z)=\mathbf{w}} = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

é uma matriz definida positiva (por Gerschgorin, os valores próprios estão em $[0,6]$ exclusivé zero pois a matriz é invertível).

$\overline{\mathbf{2.2b}}$**)** Conforme expressão anterior da hessiana e gradiente, agora com $\mathbf{x^{(0)}} = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{x^{(1)}} = -H_f(\mathbf{0})^{-1}\nabla f(\mathbf{0}) = -\left[\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -1/4 \\ -2 \\ 1 \end{array}\right]$$

daqui resulta $f(\omega(\frac{-1}{4}, -2, 1)) = e^{-\omega/2} + (\frac{1}{4} - 4)\omega + \omega^2 + e^{-\omega}$ cuja derivada é $-\frac{1}{2}e^{-\omega/2} - \frac{15}{4} + 2\omega - e^{-\omega}$só se anularia para $\omega < 0$, pelo que não é a direcção adequada.

$\overline{\mathbf{2.3}}$**)** A solução resulta de resolver o sistema linear

$$\left[\begin{array}{ccc} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{array}\right] \mathbf{x} = \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right]$$

e aplicando o método temos $\mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} = (-1, 1, 0)$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha_0 \mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{0} + \frac{\mathbf{r}^{(0)} \cdot \mathbf{d}^{(0)}}{\mathbf{d}^{(0)} \cdot A\mathbf{d}^{(0)}} \mathbf{d}^{(0)} = \frac{2}{30}\mathbf{b} = \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{15} \\ 0 \end{array}\right]$$

agora $\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(1)} = (-..........)$; $\mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{r}^{(1)} + \frac{3/4}{2}\mathbf{d}^{(0)} = (-\frac{1}{2} + \frac{3}{8}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{3}{8})$, e ainda

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \alpha_1 \mathbf{d}^{(1)} = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{array}\right] + \frac{12}{43} \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{8} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \frac{20}{43} \\ -\frac{6}{43} \\ -\frac{32}{43} \end{array}\right]$$

com $\mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(2)} = (\frac{1}{43}, -\frac{2}{43}, \frac{1}{43})$; $\mathbf{d}^{(2)} = \frac{6}{1849}(7, -15, 6)$, e finalmente a solução exacta, que é o mínimo:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(2)} + \alpha_2 \mathbf{d}^{(2)} = \left[\begin{array}{c} \frac{20}{43} \\ -\frac{6}{43} \\ -\frac{32}{43} \end{array}\right] + \frac{43}{114} \left[\begin{array}{c} \frac{42}{1849} \\ -\frac{90}{1849} \\ -\frac{36}{1849} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \frac{9}{19} \\ -\frac{3}{19} \\ -\frac{14}{19} \end{array}\right]$$

2.4a) Simplificamos usando as restrições de igualdade, $y^2 + z^2 = 2$, pelo que se trata de minimizar

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 1}{y^2 + 1}$$

com restrições de desigualdade $c_1(x, y) = 1 - xy \geq 0$, $c_2(x, y) = xy + 1 \geq 0$, que resultam de $-1 \leq xy \leq 1$. O Lagrangiano fica

$$\mathcal{L}_f(x, y, \lambda) = \frac{x^2 + 1}{y^2 + 1} - \lambda_1(1 - xy) + \lambda_2(xy + 1),$$

e temos as condições KKT

$$\nabla\mathcal{L}_f(x, \lambda) = (\frac{2x}{y^2 + 1} + \lambda_1 y + \lambda_2 y, \frac{-2y(x^2 + 1)}{(y^2 + 1)^2} + \lambda_1 x + \lambda_2 x) = (0, 0),$$

com $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1(1 - xy) = 0$, $\lambda_2(1 + xy) = 0$.

– caso $\lambda_1, \lambda_2 = 0$, obtemos condições livres $\frac{1}{y^2+1}(2x, 2y(x^2 + 1)) = (0, 0)$, e o ponto $(x, y) = (0, 0)$ é mínimo interno, e as restrições de desigualdade não estão activas.

2 Exercícios (2011)

2.1 Teste 1

2.1.1 Enunciado

1)$_{[4.0]}$ Mostre que existe pelo menos uma solução $(x, y) \in [0, 1]^2$ para o sistema não linear $(m, p \in \mathbb{N})$

$$\begin{cases} x^m - 4x + y^m + 1 = 0 \\ x^p + y^p + 1 = 4y \end{cases}$$

e que se $m \neq p$, há pelo menos duas soluções.

2)$_{[2.0]}$ Mostre que em $H^1(a, b)$, a norma

$$|||u||| = ||u||_{L^2(a,b)} + ||u'||_{L^2(a,b)}$$

é uma norma equivalente à induzida pelo produto interno.

3)$_{[10.0]}$ Considere o operador A definido em $C[0, 1]$

$$(Au)(x) = \int_0^1 u(t)^2 dt - u(x)^2.$$

.

a) Determine a derivada de Fréchet de A, para qualquer $u \in C[0, 1]$.
b) Mostre que dado $\beta > 4$, e $f \in C[0, 1] : ||f||_\infty \leq 2$, a equação

$$u(x)^2 + \beta u(x) = f(x) + \int_0^1 u(t)^2 dt$$

tem uma única solução $u \in C[0, 1] : ||u||_\infty \leq 1$. Apresente uma sucessão convergente $u_n \to u$, começando com $u_0 = 0$, e um majorante para o erro $||u - u_n||_\infty$.

c) Considere a aplicação do Método de Newton-Kantorovich à equação definida em b). Defina a equação linear que por esse método permite obter a iterada u_{n+1} a partir da iterada u_n, e obtenha u_1 começando com $u_0 = 1$.

4)$_{[4.0]}$ Considere a função $u(x) = \frac{1}{2}|x-a|\,|x-b|$. Calcule $(\partial^2 u)(v) = \langle u, v'' \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$, $\forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

2.1.2 Resolução

1) Consider the function $g(x, y) = \frac{1}{4}(x^m + y^m + 1, x^p + y^p + 1)$. Taking the convex closed set $S = [0, 1]^2$, homeomorphic to the unit ball, we show the invariance, $g(S) \subseteq S$, and since g is continuous in S, we apply the Brouwer fixed point theorem to conclude the existence of at least one fixed point $(x, y) = g(x, y)$, which corresponds to a solution of the system. In fact, if $x, y \in [0, 1]$, we have

$$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}(0{+}0{+}1, 0{+}0{+}1) \leq g(x,y) = \frac{1}{4}(x^m{+}y^m{+}1, x^p{+}y^p{+}1) \leq \frac{1}{4}(1{+}1{+}1, 1{+}1{+}1) = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}),$$

meaning that $g(x, y) \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^2 \subset [0, 1]^2 = S$. This proves the invariance of g over S, and we conclude on the existence. In fact we can state that the fixed point lays in $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^2$.

If $m \neq p$ then $x \neq y$. This means that (x, y) and (y, x) are both solutions and different. Otherwise, if $x = y$, then $2x^m + 1 = 4x = 2x^p + 1$ and this implies $x^m = x^p$, and as $m \neq p$, we obtain $x = 0$ or $x = 1$, which are not solutions.

Note: If $m = p$ the equations imply

$$x^m + y^m + 1 - 4x = x^m + y^m + 1 - 4y = 0$$

this gives $x = y$ and $2x^m + 1 = 4x$.

2) $|||.||| : H^1(a, b) \to [0, +\infty[$ is a norm (it was not asked to prove).

We can simply form the vector $U = (||u||_{L^2}, ||u'||_{L^2})$ and argue that $|||u||| = |U_1| + |U_2|$, is the l^1 norm of U in $\mathbb{R}^2$.

Also $||u||^2_{H^1(0,1)} = |U_1|^2 + |U_2|^2$ is thel^2 norm of U in $\mathbb{R}^2$, and all the norms are equivalent in $\mathbb{R}^2$.

We could also repeat the proof. On one hand,

$$||u||^2_{H^1} = ||u||^2 + ||u'||^2 \leq ||u||^2 + ||u'||^2 + 2||u||\,||u'||^2 = (||u|| + ||u'||)^2 = |||u|||^2,$$

and on the other hand,

$$2||u||^2_{H^1} = 2||u||^2 + 2||u'||^2 = (||u|| - ||u'||)^2 + (||u|| + ||u'||)^2 \geq (||u|| + ||u'||)^2 = |||u|||^2.$$

Thus $||u||_{H^1} \leq |||u||| \leq \sqrt{2}||u||_{H^1}$.

3a) We calculate the F-derivative

$$\begin{aligned}(A(u+h) - A(u))(x) &= \int_0^1 (u+h)^2(t)dt - (u+h)^2(x) - \left(\int_0^1 u(t)^2 dt - u(x)^2\right) \\ &= \underbrace{\int_0^1 2u(t)h(t)dt - 2u(x)h(x)}_{linear} + \underbrace{\int_0^1 h^2(t)dt - h^2(x)}_{=O(||h||^2)}\end{aligned}$$

we conclude that $A'_u(h)(x) = 2\left(\int_0^1 u(t)h(t)dt - u(x)h(x)\right) = 2\langle u, h\rangle - 2(uh)(x)$, because

$$||A(u+h) - A(u) - A'_u(h)||_\infty = \max_{x\in[0,1]} |\int_0^1 h^2(t)dt - h^2(x)| \leq 2||h||^2_\infty = o(||h||).$$

3b) The equation can be written as the fixed point of a G operator:

$$u(x)^2 + \beta u(x) = f(x) + \int_0^1 u(t)^2 dt \Leftrightarrow u(x) = \frac{1}{\beta}(Au + f)(x) = G(u)(x).$$

Then we have $G'_u(h) = \frac{1}{\beta}A'_u = \frac{2}{\beta}(\langle u, h\rangle - uh)$

$$||G'_u||_{\mathcal{L}(C[0,1])} = \sup_{h\neq 0}\frac{||G'_u(h)||_\infty}{||h||_\infty} = \sup_{h\neq 0}\frac{||\frac{2}{\beta}(\langle u, h\rangle - uh)||_\infty}{||h||_\infty} \leq \frac{2}{\beta}\sup_{h\neq 0}\frac{||uh||_\infty + ||uh||_\infty}{||h||_\infty} \leq \frac{4}{\beta}||u||_\infty$$

and as $||u||_\infty \leq 1$ we obtain contractivity with $L = \frac{4}{\beta} < 1$, because $\beta > 4$. The set $S = \{u \in C[0,1] : ||u||_\infty \leq 1\} = \bar{B}(0,1)$ is convex, closed, non-void and G is invariant in S

$$||u||_\infty \leq 1 \implies ||G(u)||_\infty = ||\frac{1}{\beta}(Au + f)||_\infty \leq \frac{1}{\beta}(||Au||_\infty + ||f||_\infty) \leq \frac{1}{\beta}(2||u||^2_\infty + 2) \leq \frac{4}{\beta} \leq 1,$$

by the fixed point theorem, we conclude existence and uniqueness. The sequence

$$u_{n+1}(x) = \frac{1}{\beta}\left(f(x) + \int_0^1 u_n(t)^2 dt - u_n^2(x)\right)$$

converges to the fixed point verifying $||u - u_n||_\infty \leq (\frac{4}{\beta})^n \frac{\beta}{\beta - 4}||u_1 - u_0||^n_\infty = (\frac{4}{\beta})^n \frac{1}{\beta - 4}||f||_\infty$, because $u_1 = \frac{1}{\beta}f$, as $u_0 = 0$.

3c) The equation is $u = Gu$ and we now consider it in the form $Fu = 0$, to apply Newton's method:

$$u = G(u) = \frac{1}{\beta}(Au + f) \Longleftrightarrow F(u) = f + Au - \beta u = 0,$$

By the Fréchet derivative properties $F'_u(h) = A'_u(h) - \beta h$. Therefore the Newton iteration $u_{n+1} = u_n - (F'_{u_n})^{-1}F(u_n)$ can be written with $h = u_{n+1} - u_n$:

$$F'_{u_n}(h) = -F(u_n) \Longleftrightarrow A'_{u_n}(h) - \beta h = \beta u_n - Au_n - f$$

As $A'_{u_n}(h) = 2\langle u, h\rangle - 2(uh)$, we obtain a linear equation on h :

$$2\langle u_n, h\rangle - 2u_n(x)h(x) - \beta h(x) = \beta u_n(x) - \int_0^1 u_n(t)^2 dt + u_n(x)^2 - f(x).$$

When $u_0 = 1$, we obtain

$$\begin{aligned} 2\langle 1, h\rangle - 2h(x) - \beta h(x) &= \beta - \int_0^1 1dt + 1 - f(x) \\ h(x) &= \frac{1}{2 + \beta}(f(x) - \beta + 2\langle 1, h\rangle). \end{aligned}$$

The constant $H = \langle 1, h \rangle$ is unknown, but it can be determined, multiplying both sides:

$$\begin{aligned}
\langle 1, h \rangle &= \frac{1}{2+\beta}(\langle 1, f \rangle - \beta \langle 1, 1 \rangle + 2 \langle 1, h \rangle \langle 1, 1 \rangle) \\
H &= \frac{1}{2+\beta}(\langle 1, f \rangle - \beta + 2H) \Longrightarrow H = \frac{1}{\beta} \langle 1, f \rangle - 1
\end{aligned}$$

The solution is then $h(x) = \frac{1}{2+\beta}(f(x) - \beta + 2(\frac{1}{\beta} \langle 1, f \rangle - 1)) = \frac{1}{2+\beta}(f(x) + \frac{2}{\beta} \langle 1, f \rangle) - 1$, and

$$u_1(x) = u_0(x) + h(x) = \frac{1}{2+\beta} \left(f(x) + \frac{2}{\beta} \int_0^1 f(t)dt \right).$$

4) Using the formal calculus for the derivative

$$\begin{aligned}
u'' &= \frac{1}{2}(|x-a|\,|x-b|)'' = \frac{1}{2}(sgn(x-a)\,|x-b| + sgn(x-b)\,|x-a|)' \\
&= \frac{1}{2}(2\delta(x-a)\,|x-b| + 2sgn(x-a)sgn(x-b) + 2\delta(x-b)\,|x-a|) \\
&= \frac{1}{2}(2\delta_a(x)\,|a-b| + 2sgn(x-a)sgn(x-b) + 2\delta_b(x)\,|b-a|) \\
&= (\delta_a(x) + \delta_b(x))\,|a-b| + sgn(x-a)sgn(x-b)
\end{aligned}$$

abreviating $sgn_{[a,b]}(x) = -sgn(x-a)sgn(x-b) = \begin{cases} +1, & x \in (a,b) \\ -1, & x \notin (a,b) \end{cases}$, we obtain for $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
(\partial^2 u)(v) &= \langle u'', v \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \left\langle (\delta_a + \delta_b)|a-b| - sgn_{[a,b]}, v \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= (v(a) + v(b))|a-b| - \int_{\mathbb{R}} sgn_{[a,b]}(x)v(x)dx.
\end{aligned}$$

2.2 Exame 1

2.2.1 Primeira Parte

1.1)$_{[3.5]}$ Considere o sistema não linear $(a, b \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} x + b = a + \cos(ax + by) \\ y + a = b + \sin(bx - ay) \end{cases}$$

a) Mostre que existe pelo menos uma solução $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e identifique um conjunto limitado onde as soluções se encontram.

b) Defina condições suficientes sobre a, b de forma a que essa solução seja única.

c) Explicite o sistema linear que devemos resolver em cada iteração, se aplicarmos o método de Newton-Kantorovich.

1.2)$_{[1.5]}$ Sejam $w_1 \in C[a, b]$, $w_2 \in C^1[a, b]$, com w_1 positiva e w_2 estritamente crescente. Mostre que a aplicação $|||.|||$ definida em $H^1(a, b)$ por

$$|||u||| = \left(\int_a^b w_1(t)\, u(t)^2 dt + \int_a^b w_2'(t)\, u'(t)^2 dt \right)^{1/2},$$

é uma norma equivalente a $||.||_{H^1(a,b)}$.

1.3)$_{[3.5]}$ Seja $a > 0$, $M \in \mathbb{N}$. Considere o operador $A : C[0, a] \to C[0, a]$ definido por

$$(Au)(x) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} u^2(\frac{m}{M}\, x)$$

a) Mostre que $A(C[0, a]) \subseteq C[0, a]$, e determine a derivada de Fréchet de A.

b) Determine valores $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais é invertível o operador $\alpha I + A$ no subconjunto $B = \{u \in C[0, a] : ||u||_\infty \leq 1\}$.

1.4)$_{[1.5]}$ Considere a função $u(x) = |x - a|^2 + |x - a|$. Calcule $\mathcal{A}(v) = \langle u, v'' + v' \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$, $\forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

2.2.2 Segunda Parte

2.1)$_{[2.0]}$ Seja $f \in C^2$. Considere o método $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega_k d^{(k)}$, com

$$d^{(k)} = \arg \min_{e:\, ||e||_2 = 1} e \cdot \nabla f(x^{(k)})$$

mostre que se trata de um método de descida, indicando um processo de obter ω_k.

Compare-o com o método do gradiente, quanto à descida e quanto ao custo computacional.

2.2)$_{[4.0]}$ Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Considere a função $f_\alpha(x) = x_1^2 + x_2^4 + x_3^2 - (x_1 + x_2^2 + \alpha x_3) + \alpha$.
a) Discuta os pontos de mínimo de f_α em $\mathbb{R}^3$ e determine $\min_{\mathbb{R}^3} f_\alpha$.
b) Aplique o método do gradiente, iniciando com $x^{(0)} = \mathbf{0}$. Discuta a convergência.
c) Aplique o método de Levenberg-Marquardt, escolhendo ϵ, e iniciando também com $x^{(0)} = \mathbf{0}$. Discuta a convergência.

2.3)$_{[2.0]}$ Determine condições suficientes para os pontos de mínimo de $f(x) = x^\top Ax + \alpha$ (onde A é uma matriz simétrica definida positiva), sujeita às restrições $Cx \geq b$ (desigualdade entendida componente a componente, onde C é uma matriz e b um vector).

2.4)$_{[2.0]}$ Para $y \in \mathbb{R}$, determine

$$M(y) = \min_{x \in S} \left((x_1 - y)^2 + y^6 + (x_2 + y)^4 \right)$$

onde $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x||_\infty \leq 1\}$.

2.2.3 Primeira Parte - Resolução

1.1) We consider $g(x,y) = (a-b+\cos(ax+by), b-a+\sin(bx-ay))$, and the system correspond to the fixed point equation $(x,y) = g(x,y)$.

a) We notice that $g(\mathbb{R}^2) \subseteq (a-b+[-1,1]) \times (b-a+[-1,1]) = Q$. Thus the fixed points must lay in Q, a square centered at $(a-b, b-a)$. The square is homeomorphic to the unit ball. Since $g(Q) \subseteq Q$ and g is continuous, using Brouwer's theorem, there exists at least one fixed point of g in Q, which is a solution to the system.

b) To ensure uniqueness it is sufficient to impose contractivity. This can be done by calculating the norm of the Fréchet derivative (which is the Jacobian matrix):

$$||\nabla g(x,y)||_\infty = || \begin{bmatrix} -a\sin(ax+by) & -b\sin(ax+by) \\ b\cos(bx-ay) & -a\cos(bx-ay) \end{bmatrix} ||_\infty \leq |a| + |b|.$$

It is sufficient to impose $|a| + |b| < 1$ to ensure contractivity, and uniqueness follows from Banach's fixed point theorem.

c) The equation to be solved is $f(x,y) = 0$ with $f(x,y) = (x,y) - g(x,y)$, and since

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 1 + a\sin(ax+by) & b\sin(ax+by) \\ -b\cos(bx-ay) & 1 + a\cos(bx-ay) \end{bmatrix}$$

to find $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) + (\Delta x_n, \Delta y_n)$, by Newton's method, we have to solve the linear system

$$\begin{bmatrix} 1 + a\sin(ax_n+by_n) & b\sin(ax_n+by_n) \\ -b\cos(bx_n-ay_n) & 1 + a\cos(bx_n-ay_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_n \\ \Delta y_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_n - a + b - \cos(ax_n+by_n) \\ y_n - b + a - \sin(bx_n - ay_n) \end{bmatrix}.$$

1.2) From the hypothesis, $w_1 > 0$, $w_2' > 0$. Thus $||u||_{w_1,L^2} = \left(\int_a^b w_1(x)u^2(t)dt\right)^{1/2}$ and $||u||_{w_2',L^2} = \left(\int_a^b w_2'(x)u^2(t)dt\right)^{1/2}$ are L^2 norms with positive weights, equivalent to the standard norm. The new norm is the discrete ℓ^2 norm in $\mathbb{R}^2$ of the vector (u, u'). The composition is a norm and we check the equivalence:

$$\begin{aligned} |||u|||^2 &= ||u||^2_{w_1,L^2} + ||u||^2_{w_2',L^2} \leq ||w_1||_\infty ||u||^2_{L^2} + ||w_2'||_\infty ||u'||^2_{L^2}, \\ &\leq \max ||w_1||_\infty, ||w_2'||_\infty (||u||^2_{L^2} + ||u'||^2_{L^2}) \leq C_2^2 ||u||^2_{H^1} \end{aligned}$$

with $C_2 = (\max ||w_1||_\infty, ||w_2'||_\infty)^{1/2} > 0$.

$$\begin{aligned} |||u|||^2 &\geq \min_{[a,b]}(w_1)||u||^2_{L^2} + \min_{[a,b]}(w_2')||u'||^2_{L^2}, \\ &\geq \min\{\min_{[a,b]}(w_1), \min_{[a,b]}(w_2')\}(||u||^2_{L^2} + ||u'||^2_{L^2}) \geq C_1^2 ||u||^2_{H^1} \end{aligned}$$

with $C_1 = (\min\{\min_{[a,b]}(w_1), \min_{[a,b]}(w_2')\})^{1/2} > 0$.

1.3)

a) If $x \in [0,a]$ then $\frac{m}{M}x \in [0,a]$, for $0 \leq m \leq M$. Thus if $u \in C[0,a]$ each function $x \mapsto u^2(\frac{m}{M}x)$ is $C[0,a]$ and so is their mean, and we conclude that $A(u) \in C[0,a]$.

The Fréchet derivative is given from the development

$$\begin{aligned}(A(u+h)-A(u))(x) &= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\Big((u+h)^2(\frac{m}{M}x)-u^2(\frac{m}{M}x)\Big)\\ &= 2\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}u(\frac{m}{M}x)h(\frac{m}{M}x)+\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}h^2(\frac{m}{M}x)\end{aligned}$$

the linear part is the Fréchet derivative, $A'_u(h)(x) = 2\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}u(\frac{m}{M}x)h(\frac{m}{M}x)$, because

$$||A(u+h)-A(u)-A'_u(h)||_\infty = \max_{x\in[0,a]}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}h^2(\frac{m}{M}x) \leq \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}||h||_\infty^2 = ||h||_\infty^2.$$

b) Now, to invert $\alpha I + A$ corresponds to solve $(\alpha I + A)u = f$ (for any $f \in B$) and the solution is restricted to $x \in B$.

This is a fixed point equation $u = \frac{1}{\alpha}(f - Au) = G(u)$. We know that $G'_u(h) = -\frac{1}{\alpha}A'_u(h)$ and since

$$||A'_u(h)||_\infty = \max_{x\in[a,b]} 2\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}u(\frac{m}{M}x)h(\frac{m}{M}x) \leq 2\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}||u||_\infty||h||_\infty = 2||u||_\infty||h||_\infty$$

we have

$$||G'_u||_{\mathcal{L}(C[0,a])} = \sup_{h\neq 0}\frac{||G'_u(h)||_\infty}{||h||_\infty} \leq \sup_{h\neq 0}\frac{\frac{2}{|\alpha|}||u||_\infty||h||_\infty}{||h||_\infty} = \frac{2}{|\alpha|}||u||_\infty$$

and G is a contraction in B if $\frac{2}{|\alpha|} < 1$, because $||u||_\infty \leq 1$. To apply Banach's Fixed Point Theorem to the convex and closed set B, it remains to see that G is invariant.

$||G(u)||_\infty = \frac{1}{|\alpha|}||f - Au||_\infty \leq \frac{1}{|\alpha|}(||f||_\infty + ||Au||_\infty) \leq \frac{2}{|\alpha|}$, because $||f||_\infty \leq 1$ and $||Au||_\infty \leq 1$ when $||u||_\infty \leq 1$. Note that $||Au||_\infty \leq \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}||u||_\infty^2 = ||u||_\infty^2$.

Therefore, if $|\alpha| > 2$ the invariance and the contractivity are proven, and $\alpha I + A$ is a bijection from B to B.

1.4)

In $\mathbb{R}$ we have $u(x) = (x-a)^2 + |x-a|$.

Since $u'(x) = 2(x-a) + \text{sign}|x-a|$, and $u''(x) = 2 + 2\delta_a(x)$, we have, for $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$\mathcal{A}(v) = \langle u, v'' + v'\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle u'', v\rangle_{L^2(\mathbb{R})} - \langle u', v\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = 2v(a) + 2\int_{\mathbb{R}} v(x)dx - 2\int_{\mathbb{R}}(x-a)v(x)dx - \int_a^\infty v(x)dx + \int_{-\infty}^a v(x)dx.$

2.2.4 Segunda Parte - Resolução

2.1) Consider the development in Taylor series along the direction $d^{(k)}$

$$f(x^{(k)} + \omega d^{(k)}) = f(x^{(k)}) + \omega (d^{(k)})^\top \nabla f(x^{(k)}) + O(\omega^2).$$

We remark that if we take $e = -\frac{\nabla f(x^{(k)})}{||\nabla f(x^{(k)})||}$ (the normalized gradient direction), then $e \cdot \nabla f(x^{(k)}) = -\frac{\nabla f(x^{(k)})}{||\nabla f(x^{(k)})||} \cdot \nabla f(x^{(k)}) = -||\nabla f(x^{(k)})|| < 0$ (while $x^{(k)}$ is not the critical point).

Therefore $d^{(k)}$ is such that $d^{(k)} \cdot \nabla f(x^{(k)}) \leq -||\nabla f(x^{(k)})|| < 0$, and now we follow the argument for the descent in the gradient method substituting in the Taylor expansion:

$$f(x^{(k)} + \omega d^{(k)}) \leq f(x^{(k)}) - \omega ||\nabla f(x^{(k)})|| + O(\omega^2),$$

and this means that for $\omega > 0$, and with ω sufficiently small,

$$\frac{1}{\omega}\left(f(x^{(k)} + \omega d^{(k)}) - f(x^{(k)})\right) \leq -||\nabla f(x^{(k)})|| + O(\omega) < 0$$

which means that there exists ω such that $f(x^{(k)} + \omega d^{(k)}) < f(x^{(k)})$, and it is a descent method. The best ω_k can be obtained by line search, minimizing $g(\omega) = f(x^{(k)} + \omega d^{(k)})$, meaning $\omega_k = \text{argmin} g(\omega)$. This can be done by finding $\omega : \; g'(\omega) = 0$.

As we saw, the direction $d^{(k)}$ is chosen to be the gradient or smaller, and therefore it provides a better direction of descent. However, finding the minimum along all directions is computationally very expensive, especially when the dimension increase.

2.2)

a) We find the critical points, using the gradient of $f_\alpha(x) = x_1^2 + x_2^4 + x_3^2 - (x_1 + x_2^2 + \alpha x_3) + \alpha$,

$$\nabla f_\alpha(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 1 \\ 4x_2^3 - 2x_2 \\ 2x_3 - \alpha \end{bmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_2 = \pm 1/\sqrt{2} \;\; \scriptstyle{\vee x_2 = 0} \\ x_3 = \alpha/2 \end{cases}$$

and the Hessian

$$\nabla^2 f_\alpha(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

is not positive definite if $x = 0$. For $x_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ we have the $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$, positive eigenvalues that ensure positive definiteness of the Hessian. The two points $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\alpha}{2})$ are relative minima.

Now, for both of them $f(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\alpha^2}{4} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\frac{\alpha}{2}) + \alpha = -\frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{4} + \alpha$ and this is the absolute minimum, $\min_{\mathbb{R}^3} f_\alpha = \alpha - \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{4}$.

b) We have $x^{(1)} = x^{(0)} + \omega_0 d^{(0)}$, with $d^{(0)} = -\nabla f_\alpha(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ and we minimize $g(\omega) = f_\alpha(\omega, 0, \omega\alpha) = \omega^2 + \omega^2\alpha^2 - (\omega + \alpha^2\omega) + \alpha = (\omega^2 - \omega)(1 + \alpha^2) + \alpha$, and as $g'(\omega) = (2\omega - 1)(1 + \alpha^2) =$

0, we obtain $\omega_0 = \frac{1}{2}$. Thus, $x^{(1)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$. Now $d^{(1)} = -\nabla f_\alpha(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 2x_1^{(1)} - 1 \\ 0 \\ 2x_3^{(1)} - \alpha \end{bmatrix} = \mathbf{0}$, and therefore $x^{(2)} = x^{(1)}$. This means convergence to $x^{(1)}$, but not to any minimum point.

c) In the Levenberg-Marquardt method, the direction is

$$d^{(k)} = -(\epsilon I + \nabla^2 f_\alpha(x^{(k)}))^{-1}(\nabla f_\alpha(x^{(k)})) = -\begin{bmatrix} 2+\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 12(x_2^{(k)})^2 - 2 + \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 2+\epsilon \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2x_1^{(k)} - 1 \\ 4(x_2^{(k)})^3 - 2x_2^{(k)} \\ 2x_3^{(k)} - \alpha \end{bmatrix}$$

Starting with $x^{(0)} = 0$ we have $d^{(0)} = \begin{bmatrix} 2+\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\epsilon \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{2+\epsilon}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ which is the same direction as before (now divided by $2+\epsilon$), and the result is the same: $x^{(1)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$.

The new direction is $d^{(1)} = -\nabla f_\alpha(x^{(1)}) = \frac{1}{2+\epsilon}\begin{bmatrix} 2x_1^{(1)} - 1 \\ 0 \\ 2x_3^{(1)} - \alpha \end{bmatrix} = \mathbf{0}$, and therefore $x^{(2)} = x^{(1)}$. Again, convergence to $x^{(1)}$, but not to any minimum point. (The initial guess should not be in the middle).

2.3) The Lagrangian is $\mathcal{L}f(x) = x^\top Ax + \alpha - \lambda^\top(Cx - b)$, where λ is the multipliers vector. Notice that $\lambda^\top(Cx-b) = \lambda_1(Cx-b)_1 + \cdots + \lambda_m(Cx-b)_m$, with m constraints.

The KKT conditions imply $\nabla\mathcal{L}f(x) = 2Ax - \lambda^\top C = 0$ meaning $Ax = \frac{1}{2}\lambda^\top C$, and also, $\lambda_j \geq 0$, $Cx \geq b$, and $\lambda_j(Cx-b)_j = 0$, for $j = 1, \ldots, m$.

2.4) Consider $f(x) = (x_1 - y)^2 + y^6 + (x_2 + y)^4$, we have 4 conditions $-1 \leq x_1 \leq 1$ and $-1 \leq x_2 \leq 1$.

The Lagrangian is

$$\mathcal{L}f(x) = (x_1 - y)^2 + y^6 + (x_2 + y)^4 - \lambda_1(x_1 + 1) - \lambda_2(1 - x_1) - \lambda_3(x_2 + 1) - \lambda_4(1 - x_2),$$

and the first KKT condition gives

$$\nabla\mathcal{L}f(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - y) - \lambda_1 + \lambda_2 \\ 4(x_2 + y)^3 - \lambda_3 + \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(i) When $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, we get $x_1 = y$, $x_2 = -y$ and $(y, -y)$ is the minimum point if $|y| \leq 1$.

Therefore $M(y) = y^6$ if $|y| \leq 1$.

We see that if no constraints were imposed the minimum point would be always in $(y, -y)$, otherwise intuitively we may guess that it will be at $(-1, 1)$ if $y < -1$, and at $(1, -1)$ if $y > 1$.

(ii) Take $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Then $\lambda_1 \neq 0 \implies x_1 = -1$ and $2(-1-y) - \lambda_1 = 0$, $x_2 = -y$.

As $\lambda_1 = -2(1+y) \geq 0$ implies $y \leq -1$. But then $||x||_\infty \leq 1$ implies $|x_2| = |-y| \leq 1$ and $y = -1$ is the only possibility. Similar situations in the other cases.

(iii) If both $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ then $-1 = x_1 = 1$ is impossible (similar $-1 = x_2 = 1$,if $\lambda_3, \lambda_4 \neq 0$). This excludes the cases of three non null λ_k.

Consider the case $\lambda_1, \lambda_4 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, then $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, gives

$$\begin{bmatrix} 2(-1-y) - \lambda_1 \\ 4(1+y)^3 + \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

and $\text{sign}(\lambda_1) = \text{sign}(\lambda_4) = -\text{sign}(y+1)$ are both non negative if $y \leq -1$.

Thus $M(y) = (1+y)^2 + y^6 + (1+y)^4$ if $y \leq -1$.

Symmetric situation when $\lambda_2, \lambda_3 \neq 0$, $\lambda_1 = \lambda_4 = 0$, then $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, and $\text{sign}(\lambda_2) = \text{sign}(\lambda_3) = \text{sign}(y-1) \geq 0$, if $y \geq 1$, and $M(y) = (y-1)^2 + y^6 + (y-1)^4$. The other cases lead to $x = \pm(1,1)$ where the signs of λ_k can not be both positive. We conclude:

$$M(y) = \begin{cases} (y+1)^2 + y^6 + (y+1)^4, & y \leq -1. \\ y^6, & |y| \leq 1. \\ (y-1)^2 + y^6 + (y-1)^4, & y \geq 1. \end{cases}$$

2.3 Exame 2

2.3.1 Primeira Parte

1.1)$_{[4.0]}$ Seja $a > 0$. Considere o operador definido por

$$A\phi(x) = \int_0^x K(x,y)\phi(y)dy.$$

a) Mostre que se $K \in L^2(0,a)^2$, então $A : L^2(0,a) \to L^2(0,a)$, e que $||A||_{\mathcal{L}(L^2(0,a))} \leq ||\chi K||_{L^2(0,a)^2}$, onde $\chi(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \leq x \\ 0, & \text{se } x < y \end{cases}$.

b) Defina condições suficientes em β para que em $L^2(0,a)$ seja invertível o operador $A^2 - \beta I$.

c) Começando com $\phi_0 = 0$, determine ϕ_2 uma aproximação da solução ϕ da equação integral

$$\int_0^x \phi(y)dy + 4\phi(x) = x^2,$$

pelo método do ponto fixo. Analise o erro e identifique a equação diferencial que ϕ verifica.

1.2)$_{[3.0]}$ Considere o sistema de equações em $\mathbb{R}^N$, $x_k = \cos(\alpha||x||_2 + \beta_k x_k)$, com $k = 1, \cdots, N$, em que $\alpha \in \mathbb{R}, \beta_k \in \mathbb{R}$.

a) Determine condições sobre α, β_k, de forma a que haja solução, e por outro lado que seja única em $\mathbb{R}^N$.

b) Defina o sistema linear a resolver em cada iteração do Método de Newton-Kantorovich.

1.3)$_{[3.0]}$ Considere a função $u(x) = |x-a|^\alpha$.

a) Calcule $\mathcal{A}(v) = \langle u, v'' \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$, $\forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, identificando os α onde os integrais existem.

b) Indique valores de α, m onde pode garantir que $u \in H^m(a-1, a+1)$.

2.3.2 Segunda Parte

2.1)$_{[2.0]}$ Aplique o método da secção dourada para aproximar o ponto de mínimo de $f(x) = x^2 + e^{-x}$, em $x \in [0, 3\rho]$, onde $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, identificando um intervalo de comprimento menor que $\frac{1}{2}$.

2.2)$_{[2.0]}$ Considere o método em que, na iteração k, um vector $p_\omega^{(k)} = 2\nabla f(x^{(k)}) + \omega \nabla^2 f(x^{(k)}) d^{(k)}$, verifica

$$d^{(k)} \cdot p_\omega^{(k)} < 0,$$

para uma certa direcção (escolhida aleatoriamente) $d^{(k)}$, e um certo $\omega > 0$. Mostre que $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega d^{(k)}$ é um método de descida.

2.3)$_{[3.0]}$ Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Considere a função $f(x) = 2 - \frac{x_1 + x_2}{||x||_2^2 + 1}$.

a) Discuta os pontos de mínimo de f em $\mathbb{R}^2$ e determine $\min_{\mathbb{R}^2} f$.

b) Aplique o método do gradiente, iniciando com $x^{(0)}$ adequado, justificando a escolha tendo em vista a convergência.

2.4)$_{[3.0]}$ Para $y \in \mathbb{R}$, considere

$$\mu(y) = \min_{x \in S} \left((x_1 + y)^2 + x_1 - x_2 + (x_2 + y)^2 \right).$$

a) Determine $\mu(y)$ quando $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \, x_1^2 + x_2^2 = 1, \, x_1 \geq 0\}$.

b) Explicite o algoritmo para um método de penalização quando $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \, ||x||_2 \leq 1\}$, usando o método do gradiente em todo o espaço.

2.3.3 Resolução

1.1a) Notice that

$$A\phi(x) = \int_0^x K(x,y)\phi(y)dy = \int_0^a \chi(x,y)K(x,y)\phi(y)dy = \langle \chi(x,\cdot)K(x,\cdot), \phi \rangle_{L^2(0,a)^2}.$$

Using Cauchy-Schwarz inequality

$$\begin{aligned} ||A\phi||^2_{L^2(0,a)} &= \int_0^a \langle \chi(x,\cdot)K(x,\cdot), \phi \rangle^2_{L^2(0,a)^2} \, dx \\ &\leq \int_0^a ||\chi(x,\cdot)K(x,\cdot)||^2_{L^2(0,a)} ||\phi||^2_{L^2(0,a)} dx \\ &\leq ||\chi K||^2_{L^2(0,a)^2} ||\phi||^2_{L^2(0,a)} \end{aligned}$$

Therefore if $\phi \in L^2(0,a)$ we have $\phi \in L^2(0,a)$ because $||\chi K||_{L^2(0,a)^2}$ is bounded when $K \in L^2(0,1)^2$. Also, we conclude that

$$||A||_{\mathcal{L}(L^2(9,1))} = \sup_{\phi \neq 0} \frac{||A\phi||_{L^2}}{||\phi||_{L^2}} \leq ||\chi K||_{L^2(0,a)^2} \leq ||\chi||_{L^2(0,a)^2} ||K||_{L^2(0,a)^2} \leq \frac{a}{\sqrt{2}} ||K||_{L^2(0,a)^2}.$$

noticing that $||\chi||^2_{L^2(0,a)^2} = \int_0^a \int_0^x 1 dy dx = \frac{a^2}{2}$.

1.1b) Notice that $A^2 - \beta I = (A - \beta^{1/2} I)(A + \beta^{1/2} I)$, and it we reduce the problem to check the invertibility of $A \pm \beta^{1/2} I$. Since A is linear we can use Neumann series to write the inverse as long as $|| \pm \beta^{-1/2} A|| < 1$.

From the previous result $|\beta|^{-1/2}||A|| \leq \frac{a}{\sqrt{2|\beta|}} ||K||_{L^2(0,a)^2} < 1$, which means that $|\beta| > \frac{a^2}{2} ||K||^2_{L^2(0,a)^2}$.

1.1c) The fixed point iteration is

$$\phi_{n+1}(x) = \frac{1}{4}(x^2 - \int_0^x \phi_n(y)dy)$$

which gives $\phi_1(x) = \frac{x^2}{4}$, and $\phi_2(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\int_0^x \frac{y^2}{4}dy = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{48}$.

1.2a)

We have $x_k = g_k(x) \in [-1,1]$. As g is continuous and $g([-1,1]^N) \subseteq [-1,1]^N$, which is homeomorphic to the ball, we conclude by the Brouwer theorem that, for every real coefficients, at least one solution exists.

Calculating the Jacobian matrix elements

$$\partial_j g_k(x) = -(\frac{\alpha x_j}{||x||_2} + \beta_k\delta_{jk})\sin(\alpha||x||_2 + \beta_k x_k),$$

(here δ_{jk} is the Kronecker delta), we see that $|\partial_j g_k(x)| \leq |\alpha|\frac{|x_j|}{||x||_2} + |\beta_k|\delta_{jk}$.

Also notice that as $\frac{|x_j|}{||x||_2} \leq \frac{||x||_2}{||x||_2} = 1$, and we have

$$||\nabla g||_\infty \leq \max_k \sum_{j=1}^{N}(|\alpha| + |\beta_k|\delta_{jk}) = \max_k(N\alpha + |\beta_k|) = N\alpha + ||\overrightarrow{\beta}||_\infty$$

Therefore, if $N\alpha + ||\overrightarrow{\beta}||_\infty < 1$ we have a contraction in $\mathbb{R}^N$, and by the Banach Theorem it's the unique solution, and it belongs to $[-1,1]^N$.

1.2b) We can rewrite the equation in terms of $f(x) = x - g(x)$, and therefore the Newton linear system $\nabla f(x^{(n)})\Delta x^{(n)} = -f(x^{(n)})$ is given with the matrix

$$\nabla f(x^{(n)}) = \left[\delta_{jk} - (\frac{\alpha x_j^{(n)}}{||x^{(n)}||_2} + \beta_k\delta_{jk})\sin(\alpha||x^{(n)}||_2 + \beta_k x_k^{(n)})\right].$$

1.3a)

We have $(|x-a|^\alpha)' = \alpha\text{sign}(|x-a|)|x-a|^{\alpha-1}$

and $(|x-a|^\alpha)'' = 2\alpha\delta(x-a)|x-a|^{\alpha-1} + \alpha(\alpha-1)\text{sign}^2(|x-a|)|x-a|^{\alpha-2} = \alpha(\alpha-1)|x-a|^{\alpha-2}$, if $\alpha > 1$, and if $\alpha = 1$ we just have $(|x-a|^1)'' = 2\delta(x-a)$, and of course it is not defined for $a < 1$.

Thus if $\alpha > 1$

$$\mathcal{A}(v) = \langle u, v''\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle u'', v\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\alpha-1)|x-a|^{\alpha-2}v(x)dx$$

and the integral is defined for $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, because $\alpha - 2 > -1$, and it is integrable. If α=1 then $\mathcal{A}(v) = 2v(a)$.

b) Since we know that $u^{(m)}(x) = \pm\alpha^{[m]}|x-a|^{\alpha-m}$ to be L^2 integrable we need $2\alpha - 2m > -1$, meaning $\alpha > m - \frac{1}{2}$.

2.1.

Consider the values $a_0 = 0$, $b_0 = 3\rho$, and $c_0 = \rho$, $d_0 = 2\rho$. We calculate the iterates in the table

	a_k	c_k	d_k	b_k
x : (k=0)	0	$b_0(1-\rho) = 0.708..$	$b_0\rho = 1.1459..$	$3\rho = 1.8541$
$f(x)$:	1	0.994..	1.63..	3.59..
x : (k=1)	0	$b_1(1-\rho) = 0.437..$	$c_0 = 0.708..$	$d_0 = 1.14...$
$f(x)$:	1	0.837..	0.994..	1.63..
x : (k=2)	0	$b_2(1-\rho) = 0.27..$	$c_1 = 0.437..$	$d_1 = 0.708...$
$f(x)$:	1	0.836..	0.837..	0.994..

Thus the minimum point is in $[0, 0.437]$, with length $\leq \frac{1}{2}$. (The minimum point was 0.3517..)

2.2

Using Taylor expansion, when $\omega \to 0$,

$$\begin{aligned} f(x^{(k+1)}) &= f(x^{(k)} + \omega d^{(k)}) = f(x^{(k)}) + \omega d^{(k)} \cdot (\nabla f(x^{(k)}) + \frac{\omega}{2}\nabla^2 f(x^{(k)})d^{(k)}) + o(\omega^2||d||^2) \\ &= f(x^{(k)}) + \frac{\omega}{2} d^{(k)} \cdot p_\omega^{(k)} + o(\omega^2) \end{aligned}$$

therefore if $d^{(k)} \cdot p_\omega^{(k)} < 0$, it's a descent method with small $\omega > 0$.

2.3

a) We have $\nabla ||x||_2^2 = 2x$, thus $\nabla f(x) = -\frac{(1,1)}{||x||^2+1} + 2x\frac{(x_1+x_2)}{(||x||^2+1)^2} = 0$, implies

$$(||x||^2 + 1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} (x_1 + x_2)$$

and $x_1(x_1 + x_2) = x_2(x_1 + x_2)$, that is $x_1 = \pm x_2$. As $x_1 + x_2 = 0$ is impossible ($||x||^2 + 1 \neq 0$), we have $x_1 = x_2$,

$$x_1^2 + x_1^2 + 1 = 4x_1^2 \Leftrightarrow 2x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}.$$

Thus the critical points are $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. We could calculate the Hessian, but it is enough to notice that for $x_1 = x_2$ we get $f(x_1, x_2) = 2 - \frac{2x_1}{2x_1^2+1}$, and the minimum point is in $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, and the maximum point in $x_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, since when $||x|| \to \infty$ we get $f(x) \to 2$. We conclude that

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x) = f(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = 2 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) Inicializing with $x^{(0)} = (1,1)$, we obtain by the gradient method

$$x^{(1)} = (1,1) - \omega(1,1)(-\tfrac{1}{2+1} + 2\tfrac{(1+1)}{(2+1)^2}) = (1,1)(1 - \frac{\omega}{9})$$

and define $g(\omega) = 2 - \frac{2x_1}{2x_1^2+1}$ with $x_1 = 1 - \frac{\omega}{9}$. We saw that g has the minimum point at $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{\omega}{9}$, thus $x^{(1)} = (1,1)\frac{1}{\sqrt{2}}$, and the minimum point is attained in the first iteration!

2.4

a) Let $f(x) = (x_1 + y)^2 + x_1 - x_2 + (x_2 + y)^2$
We write the Lagrangian $\mathcal{L}f(x, \lambda) = (x_1+y)^2+x_1-x_2+(x_2+y)^2-\lambda_1(1-x_1^2-x_2^2)-\lambda_2 x_1$.
The KKT conditions are

$$\nabla\mathcal{L}f(x,\lambda) = \begin{bmatrix} 2(x_1+y)+1+2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 \\ 2(x_2+y)-1+2\lambda_1 x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

as well as $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $||x||^2 = 1, x_1 \geq 0$, and $\lambda_1(1-||x||^2) = \lambda_2 x_1 = 0$ resumes to $\lambda_2 x_1 = 0$.

1st case) If $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, we obtain$\begin{cases} 2(x_1+y)+1=0 \\ 2(x_2+y)-1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -y-\frac{1}{2} \\ x_2 = -y+\frac{1}{2} \end{cases}$

We notice that it is a quadratic form with minimum point in the line $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - y(1,1)$. This line only intersects the half disk S if $y = -\frac{1}{2}$, at the point $x = (0,1)$.

2nd case) If $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$, we obtain $x_1 = 0$, and$\begin{cases} 2(x_1+y)+1-\lambda_2 = 0 \\ 2(x_2+y)-1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_2 = 2y+1 \\ x_2 = -y+\frac{1}{2} \end{cases}$

Since $x_2 \in [-1, 1]$, we get $y \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ and then $\mu(y) = y^2 - y + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 = y^2 + \frac{1}{4}$.

3rd case) If $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$, obtemos $x_1^2+x_2^2 = 1$, e$\begin{cases} 2(x_1+y)+1+2\lambda_1 x_1 = 0 \\ 2(x_2+y)-1+2\lambda_1 x_2 = 0 \end{cases}$ multiplicando as equações por x_1 e x_2 e somando, fica

$0 = 2x_1(x_1+y) + 2x_2(x_2+y) + 2\lambda_1(x_1^2+x_2^2) = 2 + 2y(x_1+x_2) + 2\lambda_1$ We can eliminate λ_1 and solve the equations.

b) We consider, with $P = 10^m$,

$$\phi(x) = (x_1+y)^2 + x_1 - x_2 + (x_2+y)^2 + Pg(x_1^2+x_2^2)$$

with $g(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{if } x > 1 \\ 0 & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ which is a C^1 function, where we can apply the gradient method.

Notice that$g(x_1^2+x_2^2) = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq 1$, which corresponds to the condition in S.

3 Outros Exercícios

Exercise 3.1. Em $C[0,1]$, considere o operador

$$(Af)(x) = (f(x))^2 + \int_0^1 \cos(f(x)xy)dy.$$

a) Calcule a derivada de Fréchet de A.
b) Mostre que a equação $Af = 4f$ tem uma só solução que verifica $||f||_\infty \leq 1$.
c) Definindo $4u_{n+1} = Au_n$, com $u_0(x) = 0$, determine $n : ||f - u_n||_\infty \leq 10^{-6}$.

Exercise 3.2. Considere a sucessão de funções definida por

$$u_{n+1}(t) = t + Au_n = \int_0^1 t + \cos(\beta ts)u_n(s)ds,$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$ é um parâmetro constante.

a) Defina $X = C[0,1]$ com a norma $||u||_B = \max_{t\in[0,1]} |(t+1)u(t)|$, e o operador A que se define nessa iteração $u_{n+1} = f + Au_n$. Calcule a derivada de Fréchet de A e majore $||A||_{\mathcal{L}(X)}$.

b) Determine condições sobre β de forma a que garanta a convergência de (u_n), e apresente uma estimativa de erro a priori, começando com $u_0 = 0$.

c) Justifique se A é compacto em X e analise a solubilidade da equação $v = Av + f$ para qualquer β e $f \in C[0,1]$. Relacione com a série de Neumann.

Exercise 3.3. Aplique uma iterada do método de Broyden à resolução do sistema não linear $g(x,y) = (\alpha, \beta)$ com $g(x,y) = (x+y, xy)$, definindo restrições de inicialização com o método de Newton.

Exercise 3.4. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} xy = a \\ x + y = b \end{cases}$$

Determine uma aproximação da solução aplicando o Método de Broyden, depois da inicialização pelo Método de Newton com o vector nulo.

Exercise 3.5. Considere a função $f(x) = \frac{1}{2}(g(x) + |x|)$ com $g \in C^1(\mathbb{R})$.

Mostre que a segunda derivada f'' (no sentido generalizado) verifica

$$\langle f'', v \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = v(0) + \frac{1}{2}\Big(\langle g, v \rangle_{L^2(\mathbb{R})} - \langle g, v \rangle_{H^1(\mathbb{R})}\Big)\,,\ \forall v \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$

Exercise 3.6. Considere a função $u(x) = |x-a| f(x)$, com $f \in C^2(\mathbb{R})$. Mostre que a segunda derivada de u (no sentido generalizado) verifica

$$\langle u'' - f'', v \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \alpha f(a) v(a) + \langle \beta f', v \rangle_{L^2(\mathbb{R})}\,,\ \forall v \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$

Exercise 3.7. Considere a função $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 2xy + 1$.

a) Mostre que há um e um só mínimo global de f em $\mathbb{R}^2$ e determine-o.

b) Iniciando em (1,1), determine a primeira iterada pelo método do gradiente.

c) O mesmo que em b), mas considerando o método de Gauss-Newton.

Em função de α, discuta se a direcção

$$d^{(n)} = (\alpha - 1)\nabla f(x^{(n)}) - \alpha[\nabla^2 f(x^{(n)})]^{-1}\nabla f(x^{(n)})$$

define uma direcção de descida para um método de minimização da função f, com $Z = f$.

Exercise 3.8. Considere $f(x,y,z) = 8x^p - 4xy + y^2 + 4z^2 + x + y - 1$.

a) Com $p = 2$, transforme num problema matricial e aplique o método dos gradientes conjugados para determinar o ponto de mínimo de f.

b) Para $p = 4$ aplique o método de Fletcher-Reeves para essa determinação, começando na origem e calculando uma iteração.

Exercise 3.9. Resolva o problema de minimização da função

$$f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 10x - 10y - 1,$$

sujeito às restrições $x^2 + y^2 \leq 5$, e $3x + y \leq 6$.

Exercise 3.10. 2.1)$_{[3.0]}$ Considere a função

$$f(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x}^\top.\mathbf{x})^2 + \mathbf{x}^\top \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & \beta+2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + x_1 + x_2 - 1,\ \text{com } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

a) Com $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, $\beta = 0$, aplicando o método dos gradientes conjugados, determine o ponto de mínimo de f.

b) Determine uma aproximação do ponto de mínimo por um método de gradientes conjugados quando $\beta = 1$.

Exercise 3.11. Seja $f(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} + a\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + a$.

a) Analise em função de $a \in \mathbb{R}$ a existência de ponto de mínimo global de f em $\mathbb{R}^N$.

b) Com $a = 1$, obtenha $\mathbf{x}^{(1)}$ aplicando o método do gradiente, com pesquisa linear pelo método da secção dourada, sendo $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{e}_1$.

c) Obtenha $\mathbf{x}^{(1)}$ pelo método de Levenberg-Marquardt.

Exercise 3.12. Discuta a solução em $\mathbb{R}^N$ do problema de minimização de

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{b} + c$$

sujeito à restrição $\mathbf{b}^\top \mathbf{x} \geq c$.

4 Trabalhos Computacionais

4.1 Modelo 1

1)$_{[6.0]}$ A temperatura T numa barra $\{\alpha\} \times [1,3]$ provocada por uma barra $[-1,1] \times \{0\}$ cuja distribuição de calor é C, é dada por

$$T(\alpha, x+2) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \log\left((2+x)^2 + (\alpha - y)^2\right) C(y,0)dy$$

(a função $\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \log ||\mathbf{x}||$ é solução fundamental da equação de Laplace 2D, que modela uma situação de estabilidade térmica).

Pretende-se que $C(x,0) = f(x) + \lambda T(\alpha, x+2)$, onde λ e f são dados.

a) Escreva esse problema enquanto uma equação integral de Fredholm de 2ª espécie

$$u(x) + \lambda \int_I K(x,y)u(y)dy = f(x),$$

e estabeleça condições teóricas em α, λ onde consiga garantir a existência e unicidade de solução, e apresente um método iterativo convergente.

b) Através de uma regra de integração numérica para o cálculo do integrais (por exemplo, Regra de Simpson), apresente graficamente a sucessão de funções obtidas e analise a convergência, em termos de uma tabela de evolução da diferença de iteradas $||u_{n+1} - u_n|| \approx k\alpha^n$, com coeficientes α, k a determinar, nas normas $C[-1,1]$, $L^2(-1,1)$ e ainda $H^1(-1,1)$.

[Considere em particular o caso $\alpha = 0.5, \lambda = 1, f(x) = |x|$]

2)$_{[6.0]}$ Considere o problema anterior modificado, com uma função Z não linear:

$$u(x) + \lambda \int_I K(x,y)Z(u(y))dy = f(x),$$

escolhendo valores de α, λ, e uma função f não triviais (análogos ao exercício 1), e por exemplo $Z(t) = t^2/2$ e outra função.

a) Compare a eficácia da aplicação do método do ponto fixo e da aplicação do método de Newton para determinar a solução.

Para efeitos de aplicação do método de Newton, pode considerar uma inversão do operador linear através da iteração do ponto fixo (ou o método de Newton para a inversão de operadores lineares).

b) Discretize o problema, definindo apenas como incógnitas os valores $u(t_k)$ em que $t_0, ..., t_m$ são $m+1$ nós de integração em $[-1,1]$. Para este problema em dimensão finita, aplique o método de Broyden para encontrar os valores $u(t_k)$, e compare com os valores obtidos em a) nesses pontos.

3)$_{[4.0]}$ Considere a base de dados CountryData["France", {{"GDP"}, {1970,2005}}] para regularização.

a) Considerando $\epsilon \in \{3,..,6\}$, implemente e aplique a Transformação de Fourier Discreta para a regularização dos N dados, e da derivada, usando dois filtros discretos $\mu^{[p]}$. Apresente os resultados gráficos.

b) Com base na evolução dos valores e derivadas até $N-\epsilon$ preveja os valores para 2006-08 por extrapolação (por exemplo, por expansão de Taylor).

4)$_{[4.0]}$ Considere o valor da amplitude de uma combinação de ondas pontuais, medido num ponto $x \in \mathbb{R}^3$:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{M} \alpha_k \frac{\cos(\omega||x-y_k||_2)}{||x-y_k||_2}$$

em que ω é a frequência (conhecida), e $y_k \in \mathbb{R}^3$ são centros de fontes com intensidades $\alpha_k \in \mathbb{R}$ (desconhecidos).

Admita que as fontes estão distantes $||y_k||_2 \gg R$, e que mede as amplitudes em pontos $x_1, \cdots, x_N$ $(N > 2M)$ tais que $||x_j||_2 < R$.

Escolha valores de (α_k, y_k) que permitam calcular $u(x_j)$. A partir de valores $\tilde{u}_j = u(x_j)(1+\epsilon_j)$ em que $\epsilon_j \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ são perturbações aleatórias de ruído, determine por um método de optimização (Levenberg-Marquardt), a recuperação dos valores (α_k, y_k) introduzidos.

[Considere, pelo menos, um caso $\varepsilon = 0.05, M = 4$]

4.2 Modelo 2

1)$_{[8.0]}$ Programe o método do ponto fixo aplicado a equações integrais $u + \mathcal{K}u = f$ com

$$(\mathcal{K}u)(x) = \int_a^b K(x, y, u(y))dy$$

em que as funções K e f são dadas pelo utilizador, bem como o intervalo $[a, b]$. Para efeitos do cálculo do integral, use o método de Simpson.

a) Indique condições sobre K de forma a garantir a convergência do método.

b) Usando como critério de paragem $||u_{n+1} - u_n||_\infty < \varepsilon$, comente sobre o erro cometido, com base em a).

c) Aplique o método a exemplos concretos com $\mathcal{K}$ linear e não linear. Em particular considere $K(x, y, z) = \cos(\alpha xyz)$ com diferentes α.

d) Discuta a implementação do método relacionando o erro de discretização do integral e o erro do método de ponto fixo.

2)$_{[6.0]}$ Implemente uma rotina para aplicar o método de Broyden na resolução de sistemas não lineares.

a) Aplique o método na resolução de um sistema não linear e apresente gráficos da convergência.

b) Aplique esse método para a resolução de equações do 5^{o} grau definidas pelos coeficientes do monómios, ou seja:

$$p_4(x) = x^5 + a_4x^4 + ... + a_0 = x^5 - (z_1 + ... + z_5)x^4 + ... - z_1 \cdots z_5$$

definindo um sistema não linear com 5 equações $z_1 + ... + z_5 = -a_4, ..., \ z_1 \cdots z_5 = -a_0$.

3)$_{[6.0]}$ Implemente o método de Fletcher-Reeves dos gradientes conjugados na optimização linear e não linear.

a) Analise um problema para minimização quadrática com $f(x) = x^\top Ax - x^\top b + c$, escolhendo a matriz A, o vector b e a constante c.

b) Aplique o método anterior para determinar a distância mínima entre duas curvas γ_1 e γ_2 definidas parametricamente em $\mathbb{R}^2$, ou seja, pretende-se minimizar

$$d(s, t) = ||\gamma_1(s) - \gamma_2(t)||_2$$

numa norma p, com $t, s \in [0, 1]$.

4.3 Modelo 3

1)$_{[10.0]}$ Programe o método do ponto fixo aplicado a equações integrais $u + \mathcal{K}u = f$ com

$$(\mathcal{K}u)(x) = \int_a^b K(x, y, u(y))dy$$

em que as funções K e f são dadas pelo utilizador, bem como o intervalo $[a, b]$. Para efeitos do cálculo do integral, use o método de Simpson, introduzindo N o número de subintervalos.

a) Indique condições sobre K de forma a garantir existência, unicidade, e a convergência do método do ponto fixo.

b) Usando como critério de paragem $||u_{n+1} - u_n||_\infty < \varepsilon$, comente sobre o erro cometido, com base em a). Discuta a implementação do método relacionando o erro de discretização do integral e o erro do método de ponto fixo.

c) Aplique o método a exemplos concretos com $\mathcal{K}$ linear e não linear. Em particular considere $K(x, y, z) = \cos(\alpha xyz)$ com diferentes α.

d) Aplique o método de Newton-Kantorovich ao caso particular em c), usando o Método de Nystrom para resolver a equação integral linear.

2)$_{[4.0]}$ Implemente uma rotina para aplicar o método de Broyden na resolução de sistemas não lineares. Aplique esse método para a resolução de equações do 5^{o} grau definidas pelos coeficientes do monómios, ou seja:

$$p_5(x) = x^5 + a_4x^4 + ... + a_0 = x^5 - (z_1 + ... + z_5)x^4 + ... - z_1 \cdots z_5$$

definindo um sistema não linear com 5 equações $z_1 + ... + z_5 = -a_4, ..., \ z_1 \cdots z_5 = -a_0$. Comente sobre a existência e unicidade de solução em $\mathbb{C}^5$.

3)$_{[6.0]}$ Sejam $C_1 = \{(x, g_1(x)) : x \in \mathbb{R}\}$, $C_2 = \{(x, g_2(x)) : x \in \mathbb{R}\}$, duas curvas definidas por gráficos. Pretende-se encontrar a distância mínima entre estas duas curvas, ou seja

$$dist(C_1, C_2) = \min_{x,y \in \mathbb{R}} ||(x, g_1(x)) - (y, g_2(y))||_p$$

em que a norma em $\mathbb{R}^2$ é $p = 2$ ou $p = 4$. Defina uma função objectivo apropriada para aplicação dos métodos seguintes, em particular a um problema com $g_1(x) = e^x, g_2(x) = x^3 + \cos(x) - 16$.

a) Implemente o método do gradiente no caso geral e aplique ao problema dado e a outro.

b) O mesmo que em a) para o Método de Newton e Levenberg-Marquardt.

c) Comente sobre a utilização em a) e b) de pesquisa linear exacta ou inexacta com critérios de Armijo-Wolfe.