Departamento de Matemática

Probabilidades e Estatística

LEGM, LEIC-A, MEC

1º semestre – 2011/2012 | 1º Teste
12/11/2011 – **10:30** | Duração: 1 hora e 30 minutos

Grupo I | **2.5** + **2.0** + **3.0** + **2.5** = **10.0** valores

Exercício 1

(a) • **Quadro de eventos e probabilidades**

Evento	Probabilidade
G_1 = habit. pertence grupo assoc. a risco de assalto elevado	$P(G_1) = 0.2$
G_2 = habit. pertence grupo assoc. a risco de assalto médio	$P(G_2) = 0.4$
G_3 = habit. pertence grupo assoc. a risco de assalto baixo	$P(G_3) = 1 - P(G_1) - P(G_2)$ $= 0.4$
A = habit. assaltada	$P(A) = ?$
$A\|G_1$ = habit. assaltada dado que pertence grupo assoc. a risco assalto elevado	$P(A\|G_1) = 0.3$
$A\|G_2$ = habit. assaltada dado que pertence grupo assoc. a risco assalto médio	$P(A\|G_2) = 1 - P(\bar{A}\|G_2)$ $= 1 - 0.9 = 0.1$
$A\|G_3$ = habit. assaltada dado que pertence grupo assoc. a risco assalto baixo	$P(A\|G_3) = 0.01$

• **Prob. pedida**

Aplicando o teorema da probabilidade total (fazendo uso da partição $\{G_1, G_2, G_3\}$), tem-se

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|G_1)P(G_1) + P(A|G_2)P(G_2) + P(A|G_3)P(G_3) \\ &= 0.2 \times 0.3 + 0.4 \times 0.1 + 0.4 \times 0.01 \\ &= 0.104. \end{aligned}$$

(b) • **Prob. pedida**

Tirando partido do facto de G_2 e G_3 serem eventos mutuamente exclusivos e aplicando o teorema de Bayes, tem-se sucessivamente

$$\begin{aligned} P\left[(G_2 \cup G_3)|\bar{A}\right] &\overset{G_2 \cap G_3 = \emptyset}{=} P(G_2|\bar{A}) + P(G_3|\bar{A}) \\ &\overset{T.Bayes}{=} \frac{P(\bar{A}|G_2) \times P(G_2)}{P(\bar{A})} + \frac{P(\bar{A}|G_3) \times P(G_3)}{P(\bar{A})} \\ &= \frac{[1 - P(A|G_2)] \times P(G_2)}{1 - P(A)} + \frac{[1 - P(A|G_3)] \times P(G_3)}{1 - P(A)} \\ &\overset{a)}{=} \frac{(1 - 0.1) \times 0.4 + (1 - 0.01) \times 0.4}{1 - 0.104} \\ &\simeq 0.84875. \end{aligned}$$

• **Resolução alternativa**

Tirando partido do facto de $\{G_1, G_2, G_3\}$ constituir uma partição do espaço de resultado e aplicando o teorema de Bayes, tem-se sucessivamente

$$
\begin{aligned}
P\left[(G_2 \cup G_3)|\bar{A}\right] &\overset{G_1 \cup G_2 \cup G_3 = \Omega}{=} 1 - P(G_1|\bar{A}) \\
&\overset{T.Bayes}{=} 1 - \frac{P(\bar{A}|G_1) \times P(G_1)}{P(\bar{A})} \\
&= 1 - \frac{[1 - P(A|G_1)] \times P(G_1)}{1 - P(A)} \\
&\overset{a)}{=} 1 - \frac{(1 - 0.3) \times 0.2}{1 - 0.104} \\
&\simeq 0.84875.
\end{aligned}
$$

Exercício 2

(a)

- **V.a.**
  $X =$ número de contas de diamanste numa amostra de 100 contas seleccionadas ao acaso e SEM reposição de uma população com 100000 contas das quais $100000 \times \frac{1}{1000} = 100$ contas de diamante
- **Distribuição de X**
  $X \sim \text{Hipergeométrica}(N, M, n)$
- **Parâmetros**
  $N = 100000$ contas
  $M = 100000 \times \frac{1}{1000} = 100$ contas de diamante
  $n = 100$ contas seleccionadas ao acaso e SEM reposição
- **Valor esperado de X**
  $E(X) \overset{form.}{=} n \times \frac{M}{N} = 100 \times \frac{100}{100000} = 0.1$
- **Variância de X**
  $V(X) \overset{form.}{=} n \times \frac{M}{N} \times \left(\frac{N-M}{N}\right) \times \frac{N-n}{N-1} = 100 \times \frac{100}{100000} \times \left(\frac{100000-100}{100000}\right) \times \frac{100000-100}{100000-1} \simeq 0.099801.$

(b)

- **Prob. pedida — expressão**

$$
\begin{aligned}
P(X = 0) &\overset{form.}{=} \frac{\binom{M}{0}\binom{N-M}{M-0}}{\binom{M}{n}} \\
&= \frac{\binom{100}{0}\binom{100000-100}{100-0}}{\binom{100000}{100}}
\end{aligned}
$$

- **V.a. aproximativa**
  Dado que $n = 100 < 0.1 \times N = 0.1 \times 100000 = 10000$, pode aproximar-se a f.p. da v.a.

$$X \sim \text{Hipergeométrica}(N, M, n)$$

  pela f.p. da v.a. aproximativa

$$\tilde{X} \sim \text{Binomial}\left(n = 100, p = \frac{M}{N} = 0.001\right)$$

- **F.p. de $\tilde{X}$**
  $P(\tilde{X} = x) = \binom{100}{x} \times 0.001^x \times (1 - 0.001)^{100-x}$, $x = 0, 1, \ldots, 100$
- **Prob. pedida — valor aproximado**

$$
\begin{aligned}
P(X = 0) &\simeq P(\tilde{X} = 0) \\
&= \binom{100}{0} \times 0.001^0 \times (1 - 0.001)^{100-0} \\
&= 0.999^{100} \\
&\simeq 0.904792.
\end{aligned}
$$

- **Obs.**

  Pelo facto de $n = 100 > 20$ e $p = 0.001 < 0.1$, seria razoável aproximar a f.p. da v.a. aproximativa $\tilde{X} \sim \text{Binomial}(n, p)$ pela f.p. de outra v.a. aproximativa $\tilde{\tilde{X}} \sim \text{Poisson}(\lambda = np)$. A título de exemplo: $P(X = 0) \simeq P\left(\tilde{\tilde{X}} = 0\right) = e^{-100\times 0.001} \simeq 0.904837$.

  A aproximação de Poisson seria de longe mais útil caso se pretendesse adiantar um valor aproximado de, por exemplo, $P(X \leq 30)$, recorrendo-se para tal a $P\left(\tilde{\tilde{X}} \leq 30\right)$.

Grupo II	**2.0** + **3.0** + **2.0** + **3.0** = **10.0** valores

Exercício 1

(a)

- **V.a.**

  X = voltagem de saída

- **Distribuição de** X

  $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$

- **Parâmetros**

  $\mu = 10^{-2} \times v$

  $\sigma^2 = 4$

- **Obtenção de** v

$$
\begin{aligned}
v \quad : \quad & P(X < 0) = 10^{-3} \\
& P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{0-\mu}{\sigma}\right) = 10^{-3} \\
& \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = 10^{-3} \\
& \frac{\mu}{\sigma} = -\Phi^{-1}(10^{-3}) \\
& \frac{\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(1 - 10^{-3}) \\
& \frac{10^{-2} \times v}{2} = \Phi^{-1}(0.999) \\
& v \stackrel{tabela}{=} 3.0902 \times \frac{2}{10^{-2}} \\
& v = 618.04.
\end{aligned}
$$

(b)

- **V.a.**

  X_i = voltagem de saída do sistema i, $i = 1, \ldots, n$

- **Distribuição, valor esperado e variância comuns**

  $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} X$, $i = 1, \ldots, 50$

  $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$

  $E(X_i) = E(X) = \mu = 10^{-2} \times v \stackrel{a)}{=} 10^{-2} \times 618.04 = 6.1804$

  $V(X_i) = V(X) = \sigma^2 \stackrel{a)}{=} 4$

- **Nova v.a.**

  $Y = \sum_{i=1}^{50} X_i$ = soma das voltagens de saída de 50 sistemas similares ao anterior e que operam de modo independente

- **Distribuição de** Y

  Como Y é uma soma de v.a. normais independentes segue-se que $Y \sim \text{Normal}(E(Y), V(Y))$.

- **Parâmetros**

  $E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{50} X_i\right) = \sum_{i=1}^{50} E(X_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} 50 \times E(X) = 50 \times 6.1804 = 309.02$

  $V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^{50} X_i\right) \stackrel{X_i\ indep.}{=} \sum_{i=1}^{50} V(X_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} 50 \times V(X) = 50 \times 4 = 200$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(Y<0) &= P\left[\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} < \frac{0-E(Y)}{\sqrt{V(Y)}}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{0-309.02}{\sqrt{200}}\right) \\ &\simeq \Phi(-21.85) \\ &\simeq 0. \end{aligned}$$

Alternativamente, usando a máquina de calcular:

$$\begin{aligned} P(Y<0) &= F_{N(309.02,200)}(0) \\ &\simeq 0. \end{aligned}$$

Exercício 2

(a)

- **Par aleatório**

  (X, Y)

- **F.p. conjunta e f.p. marginais**

  $P(X = x, Y = y)$, $P(X = x)$ e $P(Y = y)$ encontram-se na tabela seguinte:

X	Y			$P(X=x)$
	-1	0	1	
-1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$P(Y=y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X \leq 0|Y=1) &= P(X=-1|Y=1) + P(X=0|Y=1) \\ &= \frac{P(X=-1, Y=1)}{P(Y=1)} + \frac{P(X=0,Y=1)}{P(Y=1)} \\ &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} + \frac{0}{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Alternativamente,

$$\begin{aligned} P(X \leq 0|Y=1) &= \frac{P(X \leq 0, Y=1)}{P(Y=1} \\ &= \frac{P(X=-1, Y=1)}{P(Y=1)} + \frac{P(X=0,Y=1)}{P(Y=1)} \\ &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} + \frac{0}{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(b)

- **Covariância entre X e Y**

  Uma vez que pretende calcular

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

serão necessários alguns cálculos auxiliares que envolverão as f.p. conjunta de (X, Y) e marginais de X e Y obtidas na alínea anterior.

- **Valor esperado de X**

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=-1}^{1} x \times P(X=x) \\ &= (-1)\times\frac{1}{3} + 0\times\frac{1}{3} + 1\times\frac{1}{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- **Valor esperado de Y**

Tendo em conta que $Y \sim X$,

$$E(Y) = E(X)$$

- **Momento cruzado de X e Y de ordem** $(1,1)$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=-1}^{1}\sum_{y=-1}^{1} xy \times P(X=x, Y=y) \\ &= (-1)\times(-1)\times\frac{1}{6} + (-1)\times 0\times 0 + (-1)\times 1\times\frac{1}{6} \\ &\quad +0\times(-1)\times 0 + 0\times 0\times\frac{1}{3} + 0\times 1\times 0 \\ &\quad +1\times(-1)\times\frac{1}{6} + 1\times 0\times 0 + 1\times 1\times\frac{1}{6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- **Covariância entre X e Y** (cont.)

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= 0 - 0\times 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

[logo X e Y são v.a. não linearmente associadas.]

- **Averiguação da independência entre X e Y**

Para já, recorde-se que

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Leftrightarrow \quad P(X=x, Y=y) = P(X=x)\times P(Y=y),\ \forall (x,y)\in \mathbb{R}^2.$$

Ora,

$$\begin{aligned} P(X=-1, Y=-1) &= \frac{1}{6} \\ &\neq P(X=-1)\times P(Y=-1) \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que as v.a. X e Y são DEPENDENTES ($X \not\perp\!\!\!\perp Y$) [, embora não estejam linearmente associadas ($cov(X,Y)=0$).]