Departamento de Matemática

Probabilidades e Estatística

LEGM, LEIC-A, MEC

1º semestre – 2011/2012 — 2º Teste (Época Normal)
07/01/2012 – **10:30** — Duração: 1 hora e 30 minutos

Justifique convenientemente **todas as respostas!**

Grupo I — 10 valores

1. Considere uma amostra aleatória $(X_1, \ldots, X_n)$ de dimensão n ($n > 1$) proveniente de uma população X com distribuição normal e com valor esperado e variância desconhecidos e iguais a μ e σ^2, respectivamente. Considere ainda o seguinte estimador de σ^2, $T = c\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ ($c > 0$), e a variável aleatória $Z = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.

(a) Sabendo que $E(Z) = n - 1$, $V(Z) = 2(n-1)$ e $T = c\sigma^2 Z$, mostre que o erro quadrático médio (EQM) de T, na estimação de σ^2, é dado por $EQM_{\sigma^2}(T) = 2(n-1)c^2\sigma^4 + \left[c(n-1) - 1\right]^2 \sigma^4$. (1.5)

(b) Prove que, na estimação de σ^2, o erro quadrático médio de T definido na alínea anterior é mínimo quando $c = \frac{1}{n+1}$. (1.5)

2. A eficiência térmica corresponde à percentagem de energia térmica fornecida ao motor que é convertida em trabalho. Pretende estudar-se a eficiência térmica (X) de motores Diesel produzidos por um fabricante de automóveis. Com esse objectivo foram efectuados testes em 25 motores escolhidos ao acaso que produziram os seguintes resultados: $\bar{x} = 31.4$ e $s = 1.6$.

Admita que a variável aleatória X tem distribuição normal e responda às questões seguintes.

(a) O fabricante de automóveis é de opinião que o valor esperado da eficiência térmica é igual a 35, ao passo que o revendedor afirma que tal valor esperado é inferior 35. Confronte estas hipóteses e tome a decisão com base no valor p. (3.5)

(b) Deduza um intervalo de confiança a 99% para o desvio-padrão da eficiência térmica desses motores. (3.5)

Grupo II — 10 valores

1. Os docentes de uma disciplina elementar de Mecânica conjecturam que o tempo (em minutos) que os alunos levam a completar o teste da referida disciplina é uma variável aleatória X com distribuição normal com valor esperado $\mu = 100$ e desvio-padrão $\sigma = 15.6$.

No último teste da disciplina foram recolhidas 100 observações, que foram organizadas na tabela de frequências abaixo:

Classe	≤ 90	$(90, 100]$	$(100, 110]$	> 110
Freq. absoluta observada	29	21	25	25

Será a conjectura do grupo de docentes razoável à luz dos dados, ao nível de significância de 5%? (4.0)

2. Os resultados abaixo dizem respeito a um estudo cujo objectivo era averiguar a relação entre o tempo até fractura (Y, em minutos) de determinado material e a pressão aplicada (x, em Kg/mm^2):

$$\sum_{i=1}^{7} x_i = 569 \quad \sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 46\,375 \quad \sum_{i=1}^{7} y_i = 6\,310 \quad \sum_{i=1}^{7} y_i^2 = 5\,764\,600 \quad \sum_{i=1}^{7} x_i y_i = 510\,410$$

Após ter considerado o modelo de regressão linear simples $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$ ($i = 1, \ldots, 7$) e as hipóteses de trabalho habituais, responda às questões seguintes:

(a) Estime a recta de regressão assim como a variância de ϵ_i. (3.0)

(b) Uma equipa de peritos é da opinião que um aumento de $1Kg/mm^2$ na pressão aplicada provoca uma diminuição de 20 minutos no valor esperado do tempo até fractura do material. Acha que este conjunto de dados apoia a hipótese $H_0 : \beta_1 = -20$ desta equipa, ao nível de significância de 10%? (3.0)