Departamento de Matemática

Probabilidades e Estatística

LEAN, LEGM, LEIC-A, LEMat, LMAC, MEAer, MEAmbi, MEBiol, MEBiom, MEC, MEEC, MEFT, MEMec, MEQ

1º semestre – 2011/2012 | **2º TESTE** (Época Recurso)

2/02/2012 – **11:30** | Duração: 1 hora e 30 minutos

Justifique convenientemente **todas as respostas!**

Grupo I 10 valores

1. Seja T um estimador centrado do parâmetro desconhecido θ. Mostre que T^2 não é um estimador centrado de θ^2 quando $Var(T) > 0$. (2.0)

2. O controlo de qualidade de certos produtos, numa unidade fabril, é feito através de inspecção por amostragem desses produtos. Considere que o número de defeitos em cada produto é uma variável aleatória com distribuição de Poisson com parâmetro λ desconhecido. Registou-se, numa amostra de 85 produtos, um total de 10 defeitos. Com base neste resultado, deduza a estimativa de máxima verosimilhança (MV) de λ e obtenha a estimativa de MV da probabilidade de haver pelo menos um defeito num produto escolhido ao acaso. (4.0)

3. Admita que os tempos de vida de lâmpadas provenientes de duas fábricas A e B são representados por variáveis aleatórias (X e Y, respectivamente) normais e independentes, com valores esperados desconhecidos e com variâncias também desconhecidas mas que se assume serem iguais. Considere realizações de duas amostras aleatórias independentes, referentes às durações de lâmpadas provenientes das fábricas A e B, tais que $\sum_{i=1}^{7} x_i = 490$, $\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 34\,432$, $\sum_{i=1}^{6} y_i = 384$ e $\sum_{i=1}^{6} y_i^2 = 24\,790$. (4.0)

Um vendedor defende que as durações das lâmpadas possuem o mesmo valor esperado, independentemente da sua proveniência, ao passo que um outro vendedor afirma que a duração das lâmpadas provenientes da fábrica A possui valor esperado superior ao das durações das lâmpadas da fábrica B. Teste estas hipóteses ao nível de significância de 10%.

Grupo II 10 valores

1. A classificação de uma criança quanto ao género (M = masculino ou F = feminino) e à PHDA (perturbação de hiperactividade e défice de atenção) é uma variável aleatória X para a qual são atribuídos os seguintes valores: 1 se a criança for do género M e não tiver PHDA; 2 se a criança for do género M e tiver PHDA; 3 se a criança for do género F e não tiver PHDA; 4 se a criança for do género F e tiver PHDA. Segundo um modelo genético, esta variável aleatória X tem função de probabilidade:

$$P(X=x) = \begin{cases} \theta/2, & x=1 \\ (1-\theta)/2, & x=2 \\ \theta(2-\theta)/2, & x=3 \\ (1-\theta)^2/2, & x=4 \\ 0, & x \neq 1,2,3,4. \end{cases}$$

A classificação de duas mil crianças, segundo os valores de X, conduziu à seguinte tabela de frequências:

Classificação	1	2	3	4
Freq. absoluta observada	884	86	1018	12

Será que a função de probabilidade de X, com $\theta = 0.9$, se ajusta bem aos dados? Recorra a um teste de hipóteses conveniente e decida com base no valor p. (4.0)

2. Com o objectivo de estudar uma dada população de insectos, uma bióloga recolheu dados referentes à altura (x, em mm) e ao peso (Y, em dg) de cinco insectos, tendo obtido: $\sum_{i=1}^{5} x_i = 50$, $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 540$, $\sum_{i=1}^{5} y_i = 150$, $\sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 4\,676$, $\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 1\,582$. Assuma a validade do modelo de regressão linear simples $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$ $(i = 1, \ldots, 5)$ e das hipóteses de trabalho habituais.

(a) Estime a recta de regressão de Y sobre x. (2.0)

(b) Obtenha um intervalo de confiança a 95% para o declive da recta de regressão. (3.0)

(c) Avalie a significância da regressão, ao nível de significância de 5% e à luz do resultado da alínea anterior. (1.0)