Probabilidades e Estatística

LEGM + LEIC-A + LEIC-T + LETI + LMAC + MEC + MEFT

1º semestre – 2013/2014
16/11/2013 – 11:00

Duração: 90 minutos **1º teste B**

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I	10 valores

1. Uma fábrica produz chips para telemóveis dos quais 1% apresentam algum tipo de defeito. Nessa fábrica foi introduzido um controlo de qualidade para detectar eventuais defeitos nos chips produzidos. Sabe-se que 99.5% dos chips sem defeitos são classificados no controlo como não defeituosos e que a probabilidade de um chip ser classificado como não defeituoso quando efectivamente tem defeitos é 0.001.

(a) Determine a probabilidade de um chip ser correctamente classificado nesse controlo de qualidade. (3.0)

Sejam D =“um chip é defeituoso” e C =“um chip é classificado como defeituoso”. Tem-se $P(D) = 0.01$, $P(\bar{C} \mid \bar{D}) = 0.995$ e $P(\bar{C} \mid D) = 0.001$.
$P((C \cap D) \cup (\bar{C} \cap \bar{D})) = P(C \cap D) + P(\bar{C} \cap \bar{D}) = P(C \mid D)P(D) + P(\bar{C} \mid \bar{D})P(\bar{D}) = (1 - P(\bar{C} \mid D))P(D) + P(\bar{C} \mid \bar{D})(1 - P(D)) = 0.9950$.

(b) Qual é a probabilidade de um chip classificado como defeituoso ser efectivamente defeituoso? (2.0)

$P(D \mid C) = \frac{P(D\cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|D)P(D)}{P(C|D)P(D)+P(C|\bar{D})P(\bar{D})} = \frac{(1-P(\bar{C}|D))P(D)}{(1-P(\bar{C}|D))P(D)+(1-P(\bar{C}|\bar{D}))(1-P(D))} = 0.9758.$

2. O serviço de manutenção informática de um departamento de uma universidade concluiu, depois de longa experiência, que o número de computadores avariados ao longo do tempo segue um processo de Poisson com valor esperado de 6 computadores por período de 4 semanas.

(a) Calcule a probabilidade de no período de uma semana se avariarem pelo menos 3 computadores. (1.0)

Seja $X(t)$ =“número de computadores avariados num período de t semanas”. Tem-se que $X(t) \sim Poi(\lambda t)$ com $E[X(4)] = 4\lambda = 6$.
Uma vez que $X(1) \sim Poi(3/2)$, tem-se $P(X(1) \geq 3) = 1 - P(X(1) < 3) = 1 - P(X(1) \leq 2) = 1 - F_{X(1)}(2) = 1 - 0.8088 = 0.1912$.

(b) Calcule a probabilidade de em 6 semanas haver pelo menos uma em que se avariam pelo menos 3 computadores. (2.5)

Seja Y =“número de semanas em que avariam pelo menos 3 computadores num conjunto de 6 semanas”. Como Y representa o número de sucessos (avaria de pelo menos 3 computadores) em 6 repetições independentes (períodos disjuntos num processo de Poisson) de uma prova de Bernoulli então $Y \sim Bi(6, p)$, com $p = P(X(1) \geq 3) = 0.1912$.
$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - F_Y(0) = 0.7200$.

(c) Determine o número esperado de semanas que devem decorrer até que haja uma semana em que se avariam pelo menos 3 computadores. (1.5)

Seja T =“número de semanas até à primeira em que avariam pelo menos 3 computadores”. Pela justificação da alínea anterior tem-se $T \sim Geo(p)$, com $p = 0.1912$. Logo $E[T] = 1/p = 5.2301$ semanas.

Grupo II	10 valores

1. Admite-se que em determinada população o peso das pessoas pode ser descrito por uma distribuição normal com valor esperado 65 Kg.

(a) Determine a variância do peso das pessoas sabendo que na população a percentagem de pessoas com peso inferior a 40 Kg é de 5%. (2.5)

Seja X ="peso de uma pessoa da população", com $X \sim N(65, \sigma^2)$.
$P(X < 40) = 0.05 \iff P\left(\frac{X-65}{\sigma} < \frac{40-65}{\sigma}\right) = 0.05 \iff \Phi(-25/\sigma) = 0.05 \iff -25/\sigma = \Phi^{-1}(0.05) \iff$ $-25/\sigma = -1.645 \iff \sigma^2 = (25/1.645)^2$. Assim, $\sigma^2 \approx 230.9661$ Kg^2.

(b) Seis pessoas estão à espera de um elevador no qual existe o seguinte aviso: "Lotação: 5 pessoas ou 400 Kg". Qual é a probabilidade do peso das 6 pessoas exceder 400 Kg? (2.5)

Nota: se não resolveu a alinea (a) considere que o desvio padrão do peso de uma pessoa é 18 kg.

Sejam X_i ="peso da iª pessoa", $i = 1, \ldots, 6$ e $T = \sum_{i=1}^{6} X_i$ ="peso total das 6 pessoas".
Temos que $E[T] = E[\sum_{i=1}^{6} X_i] = \sum_{i=1}^{6} E[X_i] = 6E[X] = 390$ e $Var[T] = Var[\sum_{i=1}^{6} X_i] = \sum_{i=1}^{6} Var[X_i] = 6Var[X] = 1385.7966$, uma vez que as variáveis X_i são independentes e identicamente distribuídas a X. Uma vez que T é a soma de variáveis aleatórias independentes com distribuições normais, então $T \sim N(390, 1385.7966)$.
$P(T > 400) = 1 - P(T \leq 400) = 1 - F_T(400) \approx 1 - 0.6059 = 0.3941$.

2. Num *stand* de automóveis, os números de vendas diárias de carros de duas marcas distintas são duas variáveis aleatórias, representadas por X e Y, que têm uma função de probabilidade conjunta dada pela seguinte tabela:

$X \backslash Y$	0	1
0	0.20	0.30
1	0.04	0.10
2	0.26	0.10

(a) Determine o valor esperado e a moda de X condicionalmente a $Y = 1$. (2.0)

$f_{X|Y=1}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,1)}{f_Y(1)} = \begin{cases} 0.6, & x = 0 \\ 0.2, & x = 1, 2 \end{cases}$,
uma vez que $f_Y(1) = \sum_{x=0}^{2} f_{X,Y}(x,1) = 0.5$.
$E[X|Y=1] = \sum_{x=0}^{2} x f_{X|Y=1}(x) = 0.6$ e Moda$(X) = \arg \max_{x \in \{0,1,2\}} f_{X|Y=1}(x) = 0$.

(b) Calcule a variância do número total de vendas diárias de carros das duas marcas nesse *stand*. (3.0)

$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov[X,Y] = 0.8304$.
$f_X(x) = \sum_{y=0}^{1} f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.5, & x = 0 \\ 0.14, & x = 1 \\ 0.36, & x = 2 \end{cases}$, $E[X] = \sum_{x=0}^{2} x f_X(x) = 0.86$, $E[X^2] = \sum_{x=0}^{2} x^2 f_X(x) = 1.58$ e
$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 0.8404$.
$f_Y(y) = \sum_{x=0}^{2} f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.5, & y = 0 \\ 0.5, & y = 1 \end{cases} \iff Y \sim Ber(0.5)$, $E[Y] = 0.5$ e $Var[Y] = 0.25$
$E[XY] = \sum_{x=0}^{2} \sum_{y=0}^{1} xy f_{X,Y}(x,y) = 0.3$ e $Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = -0.13$.