

Duração: 90 minutos

1º teste C

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I

10 valores

1. Num certo país 6% da população sofre de uma dada doença na forma maligna e 4% possui a mesma doença mas na forma benigna. Estudos feitos para um teste de diagnóstico dessa doença revelaram que o teste dá resultado positivo (indicando que o indivíduo testado tem a doença, na forma maligna ou na forma benigna) sempre que aplicado a um indivíduo com a doença na forma maligna e ainda:

- com probabilidade 0.75, se aplicado a um indivíduo com a doença na forma benigna;
- com probabilidade 0.05, se aplicado a um indivíduo não doente.

Considere a partir de agora que é escolhido ao acaso um indivíduo da população do país em causa.

(a) Será que os acontecimentos “o indivíduo sofre da doença na forma maligna” e “o indivíduo tem a doença na forma benigna” são independentes? (1.0)

Solução: Não.

(b) Determine a probabilidade de o teste de diagnóstico aplicado ao indivíduo dar resultado positivo. (2.5)

Solução: 0.135

(c) Sabendo que o teste de diagnóstico aplicado ao indivíduo deu resultado negativo, qual é a probabilidade de o indivíduo ter a doença? (2.5)

Solução: 0.0116

2. O número de aviões que aterram num dado aeroporto no período diurno segue um processo de Poisson com valor esperado de 2 aviões por hora.

(a) Sabendo que num período diurno de 2 horas aterraram aviões no aeroporto, qual é a probabilidade de nesse período terem aterrado no máximo 5 aviões? (2.5)

Solução: 0.7811

(b) Determine a probabilidade de o tempo decorrido entre duas aterragens diurnas consecutivas de aviões no aeroporto ser inferior a 15 minutos? (1.5)

Solução: 0.3935

Grupo II

10 valores

1. As normas ambientais em vigor exigem que a concentração diária de certo poluente não exceda 120 nanogramas por metro cúbico. Admitindo que a concentração do poluente num dado local tem distribuição normal com valor esperado de 100 nanogramas por metro cúbico e que as concentrações do poluente em dias distintos são independentes:

(a) A que intervalo de valores deverá pertencer a variância da concentração do poluente no local para que as normas ambientais aí não sejam cumpridas no máximo em 10% dos dias? (2.5)

Solução: $\sigma^2 \in]0, 243.55]$

- (b) Admitindo que o desvio padrão da concentração diária no local é 10 nanogramas por metro cúbico, calcule a probabilidade de num conjunto de 15 dias haver dois ou mais dias em que as normas ambientais não são cumpridas no local. (3.0)

Solução: 0.0448

2. Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas com função massa de probabilidade conjunta dada por:

$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} \frac{x+y}{32}, & x = 1, 2 \text{ e } y = 1, 2, 3, 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Calcule o valor esperado, a moda e a mediana da variável aleatória X . (2.0)

Solução: 1.5625, 2, 2.

- (b) Obtenha $E(X|Y = 3)$ e $V(X|Y = 3)$. (2.5)

Solução: 14/9 e 20/81.