Probabilidades e Estatística

LEGM, LEIC-A, LEIC-T, LMAC, LETI, MEC, MEFT

1º semestre – 2014/2015
15/11/2014 – 09:00

Duração: 90 minutos **1º teste A**

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I 10 valores

1. Numa linha de produção de camisas, cada camisa pode apresentar defeitos de dois tipos: manchas no tecido ou imperfeições nas costuras. Constatou-se que a linha produz 8% de camisas com manchas no tecido, 3% com imperfeições nas costuras e 1% com ambos os defeitos.

(a) Mostre que a probabilidade de uma camisa retirada ao acaso da linha de produção não ter qualquer defeito é igual a 0.9. (2.0)

Sejam M =“a camisa retirada apresenta manchas no tecido” e C =“a camisa retirada apresenta imperfeições nas costuras”. Tem-se $P(M) = 0.08$, $P(C) = 0.03$ e $P(M \cap C) = 0.01$.
$P(\bar{M} \cap \bar{C}) = P(\overline{M \cup C}) = 1 - P(M \cup C) = 1 - (P(M) + P(C) - P(M \cap C)) = 0.9$.

(b) De entre as várias centenas de camisas produzidas num dia foi retirada ao acaso uma amostra de tamanho 10. Qual a probabilidade de haver mais do que 8 camisas sem qualquer defeito nessa amostra? (3.0)

Seja X =“número de camisas sem defeitos na amostra de 10 camisas”. A variável aleatória X representa o número de sucessos em 10 repetições de uma prova de Bernoulli com probabilidade de sucesso 0.9. Se as tiragens foram feitas com reposição então $X \sim Bi(10, 0.9)$. No caso contrário, $X \sim H(N, M, 10)$ mas, como $N \gg 10$, podemos usar $X \overset{a}{\sim} Bi(10, 0.9)$.
$P(X > 8) = 1 - P(X \le 8) = 1 - F_X(8) = 1 - 0.2639 = 0.7361$.
Alternativa: $P(X > 8) = P(X \ge 9) = P(Y \le 1) = F_Y(1) = 0.7361$, em que $Y = 10 - X \sim Bi(10, 0.1)$.

(c) Calcule a probabilidade de ser necessário inspecionar mais de 3 camisas até encontrar a primeira com algum defeito, admitindo que as camisas são retiradas ao acaso da elevada produção diária da fábrica. (3.0)

Seja W =“número de camisas inspecionadas até se encontrar a primeira com algum defeito”. Uma vez que W representa o número de repetições independentes de uma prova de Bernoulli até se observar o primeiro sucesso, então $W \sim Geo(p)$ com $p = P(M \cup C) = 0.1$.
$P(W > 3) = 1 - P(W \le 3) = 1 - F_W(3) = 1 - 0.271 = 0.729$.

(d) Suponha que o custo de produção de cada camisa é de 15€ e que todas as camisas que apresentem ambos os defeitos são destruídas. Por outro lado, uma camisa apenas com manchas no tecido é vendida pelo custo de produção enquanto que uma camisa apenas com costuras imperfeitas é vendida por 20€. Qual o preço a que deve ser vendida uma camisa sem defeitos para que o lucro médio por camisa seja de 10€? (2.0)

Sejam L =“lucro na venda de uma camisa, em €” e f_L a sua função de probabilidade.

$$f_L(l) = \begin{cases} P(M \cap C), & l = -15 \\ P(M \cap \bar{C}), & l = 0 \\ P(\bar{M} \cap C), & l = 5 \\ P(\bar{M} \cap \bar{C}), & l = x - 15 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} 0.01, & l = -15 \\ 0.07, & l = 0 \\ 0.02, & l = 5 \\ 0.9, & l = x - 15 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

em que x é o preço de venda de uma camisa sem defeitos.
$E[L] = \sum_l l\, f_L(l) = 0.9(x - 15) - 0.05 = 10 \iff x = 26.1(6)$

Grupo II	10 valores

1. Considere a variável aleatória X com a seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

(a) Calcule o quantil de probabilidade 0.75 da variável aleatória X. (2.0)

$F_X(q) = 0.75 \iff \int_{-\infty}^{q} f_X(x)\,dx = 0.75 \iff \int_0^q 2x\,dx = 0.75 \iff q^2 = 0.75 \iff q = \sqrt{3}/2 \approx 0.8660$, uma vez que se deve ter $0 < q < 1$.

(b) Seja $(X_1, \ldots, X_{100})$ um vetor de variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição de X. Calcule um valor aproximado para a probabilidade da soma dessas 100 variáveis exceder 70. (3.0)

Seja $T = \sum_{i=1}^{100} X_i$. Temos que $\mathrm{E}[T] = \mathrm{E}[\sum_{i=1}^{100} X_i] = \sum_{i=1}^{100} \mathrm{E}[X_i] = 100\,\mathrm{E}[X] = 200/3$ e $\mathrm{Var}[T] = \mathrm{Var}[\sum_{i=1}^{100} X_i] = \sum_{i=1}^{100} \mathrm{Var}[X_i] = 100\,\mathrm{Var}[X] = \frac{50}{9}$, uma vez que as variáveis X_i são independentes e identicamente distribuídas a X, e que $\mathrm{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 2x^2 = 2/3$, $\mathrm{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 2x^3 = 1/2$ e $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = 1/18$.

Nestas condições, o teorema do limite central garante que

$$\frac{T - \mathrm{E}[T]}{\sqrt{\mathrm{Var}[T]}} \overset{a}{\sim} N(0,1).$$

$P(T > 70) \overset{TLC}{\approx} 1 - \Phi\left(\frac{70 - 200/3}{\sqrt{50/9}}\right) \approx 1 - \Phi(1.41) = 1 - 0.9207 = 0.0793.$

Alternativa: $P(T > 70) \overset{TLC}{\approx} 1 - F_{N(200/3, 50/9)}(70) = 1 - 0.9214 = 0.0786.$

2. Considere o par aleatório (X, Y) com a seguinte função densidade de probabilidade conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xe^{-2(x+y)}, & x > 0 \text{ e } y > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

(a) Determine a função de densidade de probabilidade marginal da variável aleatória X. (2.0)

$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dy \overset{x>0}{=} \int_0^{+\infty} 8xe^{-2(x+y)}\,dy = 8xe^{-2x}\left[-\frac{e^{-2y}}{2}\right]_0^{+\infty} = 4xe^{-2x}$

$$f_X(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(b) Calcule $P(Y > 3 \mid X = 1)$. (3.0)

$P(Y > 3 \mid X = 1) = \int_3^{+\infty} f_{Y|X=1}(y)\,dy = \int_3^{+\infty} 2e^{-2y}\,dy = \left[-e^{-2y}\right]_3^{+\infty} = e^{-6} \approx 0.0025$ uma vez que

$$f_{Y|X=1}(y) = \frac{f_{X,Y}(1,y)}{f_X(1)} = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Alternativa: pode-se concluir que X e Y são independentes e que $Y \sim Exp(2)$. Assim, $P(Y > 3 \mid X = 1) = P(Y > 3)$.