

Duração: 90 minutos

1º teste B

**Justifique convenientemente todas as respostas!**

**Grupo I**

10 valores

1. Considere uma urna com 4 bolas brancas e 2 bolas pretas, da qual são extraídas 4 bolas aleatoriamente, sem reposição.

(a) Qual é a probabilidade de saírem 2 bolas brancas? (2.0)

Seja  $X$  = “número de bolas brancas nas 4 bolas extraídas”. Uma vez que as tiragens são feitas sem reposição então  $X \sim H(6, 4, 4)$  em que  $X \in \{2, 3, 4\}$ .

$$P(X = 2) = f_X(2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{\binom{6}{4}} = \frac{2}{5}.$$

(b) Sabendo que foram extraídas pelo menos 2 bolas brancas, qual é a probabilidade de no total saírem mais de 3 bolas brancas? (2.5)

$$P(X > 3 \mid X \geq 2) = \frac{P(X > 3 \wedge X \geq 2)}{P(X \geq 2)} = \frac{P(X = 4)}{P(X \geq 2)} = P(X = 4) = f_X(4) = \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{3}}{\binom{6}{4}} = \frac{1}{15}.$$

2. Num jornal é publicado diariamente um jogo de palavras cruzadas. Suponha que determinado leitor desse jornal tem a capacidade de completar o jogo com probabilidade 0.8. Indique as hipóteses que tiver de assumir para resolver as questões que se seguem.

(a) Numa semana, qual é a probabilidade do leitor completar pelo menos 4 vezes o jogo, sabendo que jogou às palavras cruzadas em todos os dias dessa semana? (2.5)

Seja  $X$  = “número de dias em que o leitor completa o jogo numa semana”. Admitindo independência entre dias distintos,  $X$  representa o número de sucessos em 7 repetições independentes de uma prova de Bernoulli com probabilidade de sucesso igual a 0.8 e, assim,  $X \sim Bi(7, 0.8)$ .

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_X(3) = 1 - 0.0333 = 0.9667.$$

Alternativa:  $P(X \geq 4) = P(Y \leq 3) = F_Y(3) = 0.9667$  em que  $Y = 7 - X \sim Bi(7, 0.2)$ .

(b) Qual é a probabilidade de ser necessário esperar pelos menos 3 dias para que o leitor não complete o jogo? Em média, quantos dias é necessário esperar para que o leitor tenha as palavras cruzadas incompletas? (3.0)

Seja  $W$  = “número de até surgir o primeiro em que o jogo não é completado”. Uma vez que  $W$  representa o número de repetições independentes de uma prova de Bernoulli até se observar o primeiro sucesso, então  $W \sim Geo(p)$ , com  $p = 1 - 0.8 = 0.2$ .

$$P(W \geq 3) = 1 - P(W < 3) = 1 - P(W \leq 2) = 1 - F_W(2) = 1 - 0.36 = 0.64.$$

$$E[W] = 1/p = 1/0.2 = 5 \text{ dias.}$$

1. Sabe-se que em determinado aeroporto os aviões aterram, em média 8 por hora, de acordo com um processo de Poisson.

(a) Calcule a probabilidade de num período de 15 minutos aterrarem no máximo 3 aviões. (2.0)

Seja  $X(t)$  = "número de aviões que aterram num aeroporto em  $t$  horas". Sabe-se que  $X(t) \sim Poi(\lambda t)$ , com  $\lambda = E[X(1)] = 8$ .

$$P(X(1/4) \leq 3) = F_{Poi(2)}(3) = 0.8571.$$

(b) Um destes aviões transpota 100 passageiros. Sabendo que a massa da bagagem por passageiro é uma variável aleatória com valor esperado 15 kg e desvio padrão 2 kg, calcule a probabilidade aproximada da massa total das bagagens dos passageiros do avião ultrapassar 1 550 kg. Admita que as massas das bagagens dos diferentes passageiros deste avião são independentes. (3.0)

Seja  $T = \sum_{i=1}^{100} X_i$  em que  $X_i$  representa a massa da bagagem do  $i^o$  passageiro, com  $i = 1, \dots, 100$ . Temos que  $E[T] = E[\sum_{i=1}^{100} X_i] = \sum_{i=1}^{100} E[X_i] = 100E[X] = 1500$  e  $\text{Var}[T] = \text{Var}[\sum_{i=1}^{100} X_i] = \sum_{i=1}^{100} \text{Var}[X_i] = 100\text{Var}[X] = 400$ , uma vez que as variáveis  $X_i$  são independentes e identicamente distribuídas a  $X$ .

Nestas condições, o teorema do limite central garante que

$$\frac{T - E[T]}{\sqrt{\text{Var}[T]}} \underset{a}{\approx} N(0, 1).$$

$$P(T > 1550) \stackrel{TLC}{\approx} 1 - \Phi\left(\frac{1550-1500}{\sqrt{400}}\right) \approx 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062.$$

$$\text{Alternativa: } P(T > 1550) \stackrel{TLC}{\approx} 1 - F_{N(1500,400)}(1550) = 1 - 0.9938 = 0.0062.$$

2. Considere o par aleatório  $(X, Y)$  que representa a voltagem (em volt) em dois nós distintos de um circuito. A função de densidade marginal de  $X$  é dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{2}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e, para  $0 < x < 1$ , a função de densidade condicional de  $Y|X = x$  é

$$f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} \frac{2x+2y}{2x+1}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

(a) Calcule o quantil de probabilidade 0.75 da variável aleatória  $X$ . (2.0)

$$F_X(q) = 0.75 \iff \int_{-\infty}^q f_X(x) dx = 0.75 \iff \int_0^q (x + \frac{1}{2}) dx = 0.75 \iff \frac{q^2+q}{2} = 0.75 \iff q = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2} \iff q = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2} \approx 0.8229, \text{ uma vez que se deve ter } 0 < q < 1$$

(b) Calcule a covariância entre  $X$  e  $Y$ . Será que as variáveis aleatórias são independentes? (3.0)

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{Y|X=x}(y) f_X(x) = \begin{cases} x + y, & 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx \stackrel{0 < y < 1}{=} \int_0^1 (x + y) dx = y + \frac{1}{2}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E[X] = E[Y] = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y) dy = \int_0^1 y (y + \frac{1}{2}) dy = \frac{7}{12}$$

$$E[XY] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 xy(x + y) dx dy = \frac{1}{3}$$

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = -\frac{1}{144} \approx -0.0069$$

Como  $\text{Cov}[X, Y] \neq 0$  então  $X$  e  $Y$  não são independentes.