DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Probabilidades e Estatística

LEE, LEGI, LEGM, LMAC, MEAmbi, MEAer, MEC

1º semestre – 2015/2016
14/11/2015 – 09:00

Duração: 90 minutos **1º teste A**

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I	10 valores

1. Numa fábrica há duas máquinas, M_1 e M_2, que produzem o mesmo tipo de peça, sendo que a máquina M_1 contribui com 70% da produção global da fábrica. Cada peça produzida pela máquina M_1 possui 0, 1 ou 2 defeitos com probabilidade 0.8, 0.1 e 0.1, respetivamente. Por outro lado, cada peça produzida pela máquina M_2 possui 0 ou 1 defeitos com probabilidade 0.75 e 0.25, respetivamente.

(a) Calcule a probabilidade de que uma peça escolhida ao acaso da produção da fábrica não possua qualquer defeito. (2.0)

Sejam M_i =“uma peça escolhida ao acaso é fabricada pela máquina i”, $i = 1,2$, e D_j =“uma peça escolhida ao acaso tem j defeitos”, $j = 0,1,2$.
Tem-se $P(M_1) = 0.7$, $P(M_2) = 1 - P(M_1) = 0.3$, $P(D_0 \mid M_1) = 0.8$, $P(D_1 \mid M_1) = P(D_2 \mid M_1) = 0.1$, $P(D_0 \mid M_2) = 0.75$, $P(D_1 \mid M_2) = 0.25$ e $P(D_2 \mid M_2) = 0$.
$P(D_0) = \sum_{i=1}^{2} P(D_0 \mid M_i)P(M_i) = 0.785$.

(b) Sabendo que uma peça escolhida ao acaso da produção da fábrica possui pelo menos um defeito, calcule a probabilidade de que tenha sido produzida na máquina M_1. (1.5)

$$P(M_1 \mid D_1 \cup D_2) = P(M_1 \mid \overline{D}_0) = \frac{(1 - P(D_0 \mid M_1))\,P(M_1)}{1 - P(D_0)} \approx 0.6512.$$

2. O número de aviões que descolam de um aeroporto numa certa hora do dia possui distribuição de Poisson de parâmetro 10.

(a) Sabendo que nessa hora de um dado dia descolaram pelo menos 10 aviões, calcule a probabilidade de terem descolado mais do que 15 aviões na mesma hora. (2.0)

Seja X =“número de aviões que descolam numa hora”, sendo que $X \sim Poi(10)$.
$$P(X > 15 \mid X \geq 10) = \frac{P(X > 15 \wedge X \geq 10)}{P(X \geq 10)} = \frac{P(X > 15)}{P(X \geq 10)} = \frac{1 - F_X(15)}{1 - F_X(9)} \approx 0.0898.$$

(b) Dadas as condições da pista, cada avião que descola do aeroporto sofre danos ligeiros nos pneus do trem de aterragem com probabilidade 0.02, independentemente do que suceda em outras descolagens.

(i) Qual é a probabilidade de haver mais de 2 aviões afetados em 20 descolagens no aeroporto? (2.0)

Seja Y =“número de aviões que sofre danos em 20 descolagens”. Como Y representa o número de sucessos em 20 realizações independentes de uma prova de Bernoulli, tem-se que $Y \sim Bi(n = 20, p = 0.02)$.
$P(Y > 2) = 1 - F_Y(2) \approx 0.0071$.

(ii) Qual é a probabilidade de ser necessário descolarem 4 ou mais aviões para que se detete o primeiro avião com o trem de aterragem afetado? Qual é o desvio padrão do número de descolagens até surgir o primeiro avião afetado? (2.5)

Seja Z =“número de descolagens até que o primeiro avião sofra danos”. Como Z representa o número de realizações independentes de uma prova de Bernoulli até ao primeiro sucesso, tem-se que $Z \sim Geo(p = 0.02)$.
$P(Z \geq 4) = 1 - F_Z(3) \approx 0.9412$.
$\sqrt{Var[Z]} = \sqrt{\dfrac{1-p}{p^2}} \approx 49.497$ descolagens.

Grupo II	10 valores

1. O tempo de vida (em anos) de um certo tipo de satélite em órbita tem distribuição exponencial, sendo que a probabilidade do satélite durar pelo menos 3 anos é $e^{-1.5}$.

(a) Justifique que o valor esperado do tempo de vida de um satélite é igual a 2 anos. (0.5)

Seja $X =$"tempo de vida de um satélite, em anos" com $X \sim Exp(\lambda)$.
$P(X \geq 3) = e^{-1.5} \iff \int_3^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = e^{-1.5} \iff e^{-3\lambda} = e^{-1.5} \iff \lambda = 1/2$. Logo, $E[X] = \frac{1}{\lambda} = 2$.

(b) Determine o valor do primeiro quartil do tempo de vida do satélite. (1.5)

$F_X(q) = 1/4 \iff \int_0^q 1/2 e^{-x/2}\, dx = 1/4 \iff e^{-q/2} = 3/4 \iff q = -2\log(3/4) \approx 0.5754$ anos.

(c) Determine a probabilidade aproximada de o tempo total de vida em órbita de 100 satélites desse tipo ser superior a 200 anos. Indique as hipóteses que assumir. (3.0)

Seja $S =$"tempo total de vida de 100 satélites" com $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$, em que X_i representa o tempo de vida do $i^{\underline{o}}$ satélite. Admitindo que os tempos de vida de diferentes satélites são independentes, e uma vez que S é a soma de um número suficientemente grande de variáveis aleatórias, tem-se pelo T.L.C. que

$$\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var[S]}} \overset{a}{\sim} N(0,1).$$

$E[S] = E[\sum_{i=1}^{100} X_i] = 100E[X] = 200$
$Var[S] = Var[\sum_{i=1}^{100} X_i] = 100Var[X] = 400$
Então, $P(S > 200) \overset{TLC}{\approx} 1 - \Phi\left(\frac{200-200}{\sqrt{400}}\right) = 0.5$.

2. Admita que a função de probabilidade conjunta de um par aleatório discreto (X, Y) é a seguinte:

$X \backslash Y$	0	1
0	0.0	0.3
1	0.4	0.2
2	0.0	0.1

(a) Avalie a função de distribuição conjunta de (X, Y) nos pontos $(1, 1)$ e $(\frac{\pi}{2}, 1)$. (1.0)

$F_{X,Y}(1,1) = P(X \leq 1, Y \leq 1) = \sum_{x\leq 1}\sum_{y\leq 1} f_{X,Y}(x, y) = 0.9$.
$F_{X,Y}(\frac{\pi}{2}, 1) = P(X \leq \frac{\pi}{2}, Y \leq 1) = F_{X,Y}(1,1) = 0.9$.

(b) Calcule $E[X|Y = 1]$. (1.5)

$$f_{X|Y=1}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,1)}{f_Y(1)} = \begin{cases} 3/6, & x = 0 \\ 2/6, & x = 1 \\ 1/6, & x = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$, uma vez que $f_Y(1) = \sum_x f_{X,Y}(x,1) = 0.6$.

$E[X|Y = 1] = \sum_{x=0}^{2} x f_{X|Y=1}(x) = 2/3$.

(c) Determine $\text{Var}\left[X + Y^2\right]$. (2.5)

$$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.4, & y = 0 \\ 0.6, & y = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \iff Y \sim Ber(0.6)$$

$E[Y] = 0.6$ e $Var[Y] = 0.24$

$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y) \begin{cases} 0.3, & x = 0 \\ 0.6, & x = 1 \\ 0.1, & x = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$E[X] = \sum_x x f_X(x) = 0.8$, $E[X^2] = \sum_x x^2 f_X(x) = 1.0 \implies Var[X] = 0.36$

$E[XY] = \sum_x \sum_y xy f_{X,Y}(x,y) = 0.4$, $Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = -0.08$

$Var[X + Y^2] = Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov[X,Y] = 0.44$, uma vez que, neste caso, $Y = Y^2$.