



Duração: 90 minutos

1º teste

**Justifique convenientemente todas as respostas!**

**Grupo I**

10 valores

1. Considere um dado equilibrado e outro dado viciado em que a probabilidade de sair a face 1 é  $1/2$  e as restantes faces (2 a 6) têm igual probabilidade de ocorrerem.

- (a) Admita que é selecionado ao acaso um dos dois dados referidos. Sabendo que a soma de pontos obtidos em 3 lançamentos do dado selecionado é igual a 18, determine a probabilidade de ter sido selecionado o dado viciado. (2.5)

Considerem-se o acontecimento  $V$  = “o dado viciado é selecionado” e as variáveis aleatórias  $X_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , que representam o número de pontos obtidos no  $i$ -ésimo lançamento de um dado. Tem-se que  $P(V) = 1/2$ ,  $P(X_i = j | \bar{V}) = 1/6$ , para  $i = 1, 2, 3$  e  $j = 1, \dots, 6$ ,  $P(X_i = 1 | V) = 1/2$  e  $P(X_i = j | V) = k$ , para  $i = 1, 2, 3$  e  $j = 2, \dots, 6$ .

Como  $1 = P(X \in \{1, \dots, 6\} | V) = 1/2 + 5k$  tem-se ainda que  $k = 1/10$ .

$$P(V | X_1 + X_2 + X_3 = 18) \stackrel{\text{Teo. de Bayes}}{=} \frac{P(X_1 + X_2 + X_3 = 18 | V)P(V)}{P(X_1 + X_2 + X_3 = 18 | V)P(V) + P(X_1 + X_2 + X_3 = 18 | \bar{V})P(\bar{V})} =$$

$$= \frac{P(X_1 = 6, X_2 = 6, X_3 = 6 | V)}{P(X_1 = 6, X_2 = 6, X_3 = 6 | V) + P(X_1 = 6, X_2 = 6, X_3 = 6 | \bar{V})} \stackrel{\text{indep.}}{=} \frac{\prod_{i=1}^3 P(X_i = 6 | V)}{\prod_{i=1}^3 P(X_i = 6 | V) + \prod_{i=1}^3 P(X_i = 6 | \bar{V})} = \frac{(1/10)^3}{(1/10)^3 + (1/6)^3} = \frac{27}{152} \approx 0.1776.$$

- (b) Qual é a probabilidade de serem necessários pelo menos 4 lançamentos do dado viciado para obter a face 1? (2.5)

Seja  $Y$  = “nº de lançamentos do dado viciado até se obter a face 1”. Uma vez que  $Y$  representa o número de realizações independentes de uma prova de Bernoulli até ocorrer o primeiro sucesso, tem-se que  $Y \sim Geo(p = 1/2)$ .

$$P(Y \geq 4) = 1 - P(Y < 4) = 1 - P(Y \leq 3) = 1 - F_Y(3) = 1/8.$$

2. Um fabricante de computadores compra chips a um fornecedor externo que os disponibiliza em lotes de 100 unidades. O controlo de qualidade é feito examinando ao acaso e sem reposição alguns dos chips de cada lote.

- (a) Admita que, para avaliar a qualidade de um lote, o fabricante examina 10 chips e rejeita esse lote se for encontrado pelo menos um chip defeituoso entre os chips examinados. Qual é a probabilidade de um lote contendo 5 chips defeituosos ser rejeitado? (2.5)

Seja  $X$  = “nº de chips defeituosos entre os 10 examinados”. Como  $X$  representa o número de sucessos em 10 tiragens sem reposição então  $X \sim H(N = 100, M = 5, n = 10)$ .

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{5}{0} \binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} \approx 0.4162.$$

- (b) Admita que a proporção de chips defeituosos produzidos pelo fornecedor é 0.05. Sabendo que o fornecedor vendeu 36 lotes de 100 chips cada, calcule a probabilidade aproximada de o número médio de chips defeituosos por lote (no conjunto de 36 lotes vendidos) ser quanto muito um. (2.5)

Seja  $Y_i$  = “nº de chips defeituosos no lote  $i$ ”, com  $i = 1, \dots, 36$  e  $\bar{Y} = \sum_{i=1}^{36} Y_i / 36$ . Tem-se que  $Y_i \sim Bi(n = 100, p = 0.05)$ .

$P(\bar{Y} \leq 1) = P(\sum_{i=1}^{36} Y_i \leq 36) = F_{Bi(3600, 0.05)}(36) \approx 0$ , uma vez que  $\sum_{i=1}^{36} Y_i$  é a soma de variáveis aleatórias binomiais que se admite que são independentes.

*Nota:* também é possível recorrer ao teorema do limite central.

1. Admita que o tempo de atendimento de clientes num dado supermercado é uma variável aleatória  $X$  com distribuição exponencial de valor esperado igual a 2 min.

(a) Qual é a probabilidade de um cliente do supermercado demorar entre 1 e 3 minutos a ser atendido? (1.0)

$$\text{Como } X \sim \text{Exp}(\lambda) \text{ e } E[X] = \frac{1}{\lambda} = 2 \text{ tem-se } \lambda = \frac{1}{2}.$$

$$P(1 < X < 3) = \int_1^3 \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx = e^{-1/2} - e^{-3/2} \approx 0.3834.$$

(b) Supondo que um cliente do supermercado já está a ser atendido há 1 min, determine a probabilidade de o seu tempo (total) de atendimento ser superior a 3 min? (1.5)

$$P(X > 3 | X > 1) = P(X > 2), \text{ pela amnésia da distribuição exponencial.}$$

$$P(X > 2) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx = e^{-1} \approx 0.3679.$$

(c) Calcule a probabilidade de, num conjunto de 10 compras no supermercado, haver pelo menos 2 compras com tempo de atendimento do cliente associado compreendido entre 1 e 3 minutos. (2.5)

Seja  $Y$  = "nº de compras com tempo de atendimento do cliente associado compreendido entre 1 e 3 minutos, num conjunto de 10 compras". Uma vez que  $Y$  representa o número de sucessos em 10 repetições de uma prova de Bernoulli, que admitimos que são independentes, então  $Y \sim Bi(n = 10, p)$  com  $p = P(1 < X < 3) = 0.3834$ .

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - F_Y(1) \approx 0.9427.$$

2. Considere o par aleatório discreto  $(X, Y)$  com a seguinte função de probabilidade conjunta:

$X \setminus Y$	0	1	2
0	0.2	0.0	0.1
1	0.2	0.0	0.1
2	0.0	0.3	0.1

(a) Determine a função de probabilidade marginal da variável aleatória  $X$ . (1.0)

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y) = \begin{cases} 0.3, & x = 0, 1 \\ 0.4, & x = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(b) Determine a moda e a mediana de  $X$ . (1.5)

$$\text{Moda}(X) = \arg \max_{x \in \mathbb{R}} P(X = x) = 2$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.3, & 0 \leq x < 1 \\ 0.6, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases} \text{ e Mediana}(X) = Q_{0.5} : \begin{cases} P(X \leq Q_{0.5}) \geq 0.5 \\ P(X \geq Q_{0.5}) \geq 0.5 \end{cases} \iff \begin{cases} F_X(Q_{0.5}) \geq 0.5 \\ P(X < Q_{0.5}) \leq 0.5 \end{cases}$$

$$\text{Mediana}(X) = 1 \text{ porque } F_X(1) = 0.6, P(X < 1) = 0.3, \forall x < 1 : F_X(x) < 0.5 \text{ e } \forall x > 1 : P(X < x) > 0.5.$$

(c) Calcule  $P(Y > 1 | X = 2)$ . Usando a probabilidade calculada diga, justificando, se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias independentes. (2.5)

$$P(Y > 1 | X = 2) = P(Y = 2 | X = 2) = \frac{P(Y=2, X=2)}{P(X=2)} = \frac{0.1}{0.4} = 1/4.$$

$$P(Y > 1) = P(Y = 2) = f_Y(2) = \sum_x P(X = x, Y = 2) = 0.3.$$

Como  $P(Y > 1 | X = 2) \neq P(Y > 1)$  conclui-se que as variáveis não são independentes.