Departamento de Matemática

Probabilidades e Estatística

LEAN, LEGM, LEIC-A, LEIC-T, MEAer, MEMec

2º semestre – 2010/2011 — 1º Teste - Código **B**

16/4/2011 – **9** horas — Duração: 1 hora e 30 minutos

Grupo I	**2.5** + **1.5** + **2.0** + **2.5** + **1.5** = **10.0** valores

Exercício 1

(a) • **Quadro de eventos e probabilidades**

Evento	Probabilidade
$A =$ sapato fabricado pela máquina A	$P(A) = 0.4$
$B =$ sapato fabricado pela máquina B	$P(B) = 0.25$
$C =$ sapato fabricado pela máquina C	$P(C) = 1 - 0.25 - 0.4 = 0.35$
$D =$ sapato ser defeituoso	$P(D) =?$
$D\|A =$ sapato ser defeituoso dado que foi fabricado pela máquina A	$P(D\|A) = 0.02$
$D\|B =$ sapato ser defeituoso dado que foi fabricado pela máquina B	$P(D\|B) = 0.05$
$D\|C =$ sapato ser defeituoso dado que foi fabricado pela máquina C	$P(D\|C) = 0.04$

• **Prob. pedida**

Aplicando o teorema da probabilidade total (fazendo uso da partição $\{A, B, C\}$), tem-se

$$\begin{aligned}
P(\bar{D}) = (1 - P(D)) & \\
&= 1 - (P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)) \\
&= 1 - (0.02 \times 0.4 + 0.25 \times 0.05 + 0.35 \times 0.04) \\
&= 1 - 0.0345 = 0.9655.
\end{aligned}$$

(b) • **Prob. pedida**

Aplicando agora o teorema de Bayes, tem-se

$$\begin{aligned}
P(\bar{B}|\bar{D}) & \\
&= 1 - P(B|\bar{D}) \\
&= 1 - \frac{P(\bar{D}|B) \times P(B)}{P(\bar{D})} \\
&= 1 - \frac{[1 - P(D|B)] \times P(B)}{P(\bar{D})} \\
&\simeq 1 - \frac{(1 - 0.05) \times 0.25}{0.9655} \\
&\simeq 0.7540.
\end{aligned}$$

Exercício 2

(a)
- **V.a.**
  $X =$ número de traços numa película fotográfica
- **Distribuição de X**
  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$
- **F.p. de X**
  $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$
- **Parâmetro**

$$\begin{aligned} \lambda \quad : \quad & P(X = 0) = 0.05 \\ & \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^0}{0!} = 0.05 \\ & \lambda = -\ln(0.05) \\ & \lambda \simeq 2.9957 \simeq 3 \end{aligned}$$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} & P(X \geq 5 | X \geq 1) \\ & \qquad = \frac{P(X \geq 5, X \geq 1)}{P(X \geq 1)} \\ & \qquad = \frac{P(X \geq 5)}{1 - P(X < 1)} \\ & \qquad = \frac{1 - F_X(4)}{1 - P(X = 0)} \\ & \qquad = \frac{1 - 0.8153}{1 - 0.05} \\ & \qquad \simeq \begin{cases} \frac{1 - F_{Poisson(3)}(4)}{1 - 0.05} \stackrel{tabela}{=} \frac{1 - 0.8153}{0.95} = 0.1944, & \lambda \simeq 3 \\ \frac{1 - F_{Poisson(-\ln(0.05))}(4)}{1 - 0.05} \stackrel{maq.}{=} \frac{1 - 0.815980}{0.95} = 0.1937, & \lambda = -\ln(0.05). \end{cases} \end{aligned}$$

(b)
- **V.a.**
  $Y =$ número de películas fotográficas que não contenham traços, em 20 seleccionadas ao acaso
- **Distribuição de Y**
  $Y \sim \text{binomial}(n, p)$
- **Parâmetros**
  $n = 20$
  $p = P(\text{película fotográfica que não contenha traços}) = P(X = 0) \stackrel{a)}{=} 0.05$
- **F.p. de Y**
  $P(Y = y) = \binom{20}{y} 0.05^y (1 - 0.05)^{20-y}$, $y = 0, 1, 2, \ldots, 20$
- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} & P(Y \leq 2) \\ & \qquad = F_{binomial(20,0.05)}(2) \\ & \qquad \stackrel{tabela}{=} 0.9245 \end{aligned}$$

(c)
- **V.a.**
  $W =$ número de películas fotográficas a inspeccionar até encontrar a 1a. com pelo menos um traço
- **Distribuição de W**
  $W \sim \text{geométrica}(p)$

- **Parâmetros**

  $p = P(\text{película fotográfica que contenha pelo menos um traço}) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \stackrel{a)}{=} 1 - 0.05 = 0.95$

- **F.p. de W**

  $P(W = w) = (1 - 0.95)^{w-1}\, 0.95,\ w = 1, 2, \ldots$

- **Valor esperado de W**

  $E(W) \stackrel{form}{=} \frac{1}{p} = \frac{1}{0.95} \simeq 1.0526$

- **Moda de W**

  Atendendo ao facto de $P(W = w)$ ser uma função decrescente de w em $\{1, 2, \ldots\}$ pode concluir-se que

  $$\begin{aligned} mo = mo(W) \quad : \quad & P(W = mo) = \max_{w=1,2,\ldots} P(W = w) \\ & mo = 1. \end{aligned}$$

Grupo II	**2.0 + 3.0 + 2.5 + 1.5 + 1.0 = 10.0** valores

Exercício 1

(a)

- **V.a.**

  X = tempo de espera (em minutos) até à chegada do 1o. cliente

- **Distribuição de X**

  $X \sim \text{exponencial}(\lambda)$

- **Parâmetro**

  $$\begin{aligned} \lambda \quad : \quad & E(X) = 5 \\ & \frac{1}{\lambda} = 5 \\ & \lambda = 0.2 \end{aligned}$$

- **F.d.p. de X**

  $f_X(x) = \begin{cases} 0.2\, e^{-0.2x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

- **Prob. pedida**

  $$\begin{aligned} P(X \geq 6) & \\ &= \int_6^{+\infty} f_X(x)\, dx \\ &= \int_6^{+} \infty 0.2\, e^{-0.2x}\, dx \\ &= -e^{-0.2x}\Big|_6^{+\infty} \\ &= e^{-0.2\times 6} \\ &\simeq 0.3012. \end{aligned}$$

(b)

- **V.a.**

  X_i = tempo de espera (em minutos) até à chegada do 1o. cliente no $i-$ésimo dia, $i = 1, \ldots, 100$

- **Distribuição de X_i**

  $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} X,\ i = 1, \ldots, 100$

  $X \sim \text{exponencial}(0.2)$

- **Valor esperado e de variância X_i**

  $E(X_i) = \frac{1}{\lambda} \stackrel{a)}{=} 5 < +\infty$

  $V(X_i) \stackrel{form}{=} \frac{1}{\lambda^2} \stackrel{a)}{=} 5^2 < +\infty$

- **Nova v.a.**

  $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i =$ tempo total de espera (em minutos) até à chegada do 1o. cliente em 100 dias

- **Valor esperado e variância de Y**

  $E(Y) \stackrel{X_i \sim X}{=} 100 \times E(X) = 100 \times 5 = 500$

  $V(Y) \stackrel{X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} X}{=} 100 \times V(X) = 100 \times 5^2 = 2500$

- **Distribuição aproximada de Y**

  Pelo Teorema do Limite Central (TLC) pode escrever-se

$$\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \stackrel{a}{\sim} \text{Normal}(0,1).$$

- **Valor aproximado da prob. pedida**

$$\begin{aligned} & P(Y < 360) \\ & \quad = \quad P\left[\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \leq \frac{360 - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}}\right] \\ & \quad \stackrel{TLC}{\simeq} \quad \Phi\left(\frac{360 - 500}{\sqrt{2500}}\right) \\ & \quad \simeq \quad \Phi(-2.8) \ = \\ & \quad = \quad 1 - \Phi(2.8) \ = \\ & \quad \stackrel{tabela}{=} \quad 1 - 0.9974 = 0.0026.) \end{aligned}$$

Exercício 2

(a)

- **Par aleatório**

  (X, Y)

  $X =$ número de bolas brancas em três extracções sem reposição de urna com duas bolas brancas e três bolas vermelhas

  $Y =$ número de bolas vermelhas em três extracções sem reposição de urna com duas bolas brancas e três bolas vermelhas $= 3 - X$

- **Distribuição de X**

  $X \sim \text{hipergeométrica}(N, M, n)$

- **Parâmetros**

  $N =$ número total de bolas na urna $= 5$

  $M =$ número de bolas brancas na urna $= 2$

  $n =$ número de bolas extraídas sem reposição $= 3$

- **F.p. de X**

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \begin{cases} \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & x = \max\{0, n-(N-M)\}, \ldots, \min\{n, M\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\binom{2}{x}\binom{5-2}{3-x}}{\binom{5}{3}}, & x = 0, 1, 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

- **F.p. conjunta de** (X, Y)

  Tendo em conta que as v.a. X e Y tomam valores em $\{0, 1, 2\}$ e $\{1, 2, 3\}$, respectivamente, e o modo como estão relacionadas ($Y = 3 - X$) pode afirmar-se que os únicos pares (x, y) com probabilidade não nula são: $(0, 3), (1, 2), (2, 1)$.

  As respectivas probabilidades são dadas por:

$$\begin{aligned} P(X = 0, Y = 3) &= P(X = 1) \\ &= \frac{\binom{2}{0}\binom{5-2}{3-0}}{\binom{5}{3}} \\ &= 0.1 \\ P(X = 1, Y = 2) &= P(X = 2) \\ &= \frac{\binom{2}{1}\binom{5-2}{3-1}}{\binom{5}{3}} \\ &= 0.6 \\ P(X = 2, Y = 1) &= P(X = 3) \\ &= \frac{\binom{2}{2}\binom{5-2}{3-2}}{\binom{5}{3}} \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

- Em forma de tabela, f.p. conjunta (e f.p. marginais) será:

X	Y			$P(X = x)$
	1	2	3	
0	0	0	0.1	0.1
1	0	0.6	0	0.6
2	0.3	0	0	0.3
$P(Y = y)$	0.3	0.6	0.1	1

Resolução alternativa

- **Par aleatório**

  (X, Y)

  $X =$ número de bolas brancas em três extracções sem reposição de urna com 2 bolas brancas e 3 bolas vermelhas

  $Y =$ número de bolas vermelhas em três extracções sem reposição de urna com 2 bolas brancas e 3 bolas vermelhas $= 3 - X$

- **F.p. conjunta de** (X, Y)

  Tendo em conta que as v.a. X e Y tomam valores em $\{0, 1, 2\}$ e $\{1, 2, 3\}$, respectivamente, e o modo como estão relacionadas ($Y = 3 - X$) pode afirmar-se que os únicos pares (x, y) com probabilidade não nula são: $(0, 3), (1, 2), (2, 1)$.

  Considerando os acontecimentos $V_i =$ 'i-ésima bola é vermelha' e $B_i =$ 'i-ésima bola é branca', $i = 1, \ldots, 3$, recorrendo à lei das probabilidades compostas e ao Axioma 3 da Axiomática de Kolmogorov, as probabilidades destes três pares são dadas por:

$$\begin{aligned} P(X = 2, Y = 1) &= P(\{B_1B_2V_3; B_1V_2B_3; V_1B_2B_3\}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} \times 3 \\ &= 0.3 \\ P(X = 1, Y = 2) &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times 3 \\ &= 0.6 \\ P(X = 0, Y = 3) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \\ &= 0.1 \end{aligned}$$

- Em forma de tabela, f.p. conjunta (e f.p. marginais) será:

X	Y			$P(X=x)$
	1	2	3	
0	0	0	0.1	0.1
1	0	0.6	0	0.6
2	0.3	0	0	0.3
$P(Y=y)$	0.3	0.6	0.1	1

(b)

- **V.a.**
  X
- **Distribuição de** X
  $X \sim$ hipergeométrica$(N=5, M=2, n=3)$
- **Valor esperado de** X

$$\begin{aligned} E(X) &\stackrel{form}{=} n\,\frac{M}{N} \\ &= 3 \times \frac{2}{5} \\ &= 1.2 \end{aligned}$$

- **V.a.**
  $Y = 3 - X$
- **Distribuição de** Y
  $Y \sim$ hipergeométrica$(N=5, M=3, n=3)$
- **Valor esperado de** Y
  $E(Y) = 3 \times \frac{3}{5} = 1.8.$

  Alternativa de cálculo de $E(Y)$

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(3-X) \\ &= 3 - E(X) \\ &= 3 - 1.2 \\ &= 1.8. \end{aligned}$$

Resolução alternativa

- **Valor esperado de** X

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{2} x \times P(X=x) \\ &= \sum_{x=0}^{2} x \times \sum_{y=1}^{3} P(X=x, Y=y) \\ &= 0 \times 0.1 + 1 \times 0.6 + 2 \times 0.3 \\ &= 1.2 \end{aligned}$$

- **Valor esperado de** Y

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y=1}^{3} y \times P(Y=y) \\ &= \sum_{y=1}^{3} y \times \sum_{x=0}^{2} P(X=x, Y=y) \\ &= 1 \times 0.3 + 2 \times 0.6 + 3 \times 0.1 \\ &= 1.8. \end{aligned}$$

(c) • **Averiguação da independência entre X e Y**

Dado que $\exists (x,y) : P(X=x, Y=y) \neq P(X=x) \times P(Y=y)$ concluí-se que X e Y são DEPENDENTES.

Por exemplo, para $(x,y) = (0,1)$

$$\begin{array}{rcl} P(X=0, Y=1) & = & 0 \\ & \neq & P(X=0) \times P(Y=1) \stackrel{a)}{=} 0.1 \times 0.3 = 0.03. \end{array}$$

Em **alternativa**, se não resolveu a alínea a):

Chegar-se-ia à mesma conclusão ao constatar-se que sendo $Y = 3 - X$, qualquer das v.a.'s é uma função afim da outra.