DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Probabilidades e Estatística

LEE, LEGI, LMAC, LEMat, LERC, LQ, MEAmbi, MEBiol, MEBiom, MEEC, MEFT, MEQ

2º semestre – 2010/2011 — 1º Teste - Código **C**

16/4/2011 – **11** horas — Duração: 1 hora e 30 minutos

Grupo I	**2.5** + **1.5** + **1.5** + **2.5** + **2.0** = **10.0** valores

Exercício 1

(a) • **Quadro de eventos e probabilidades**

Evento	Probabilidade
$A =$ leite oriundo do produtor A	$P(A) = 0.30$
$B =$ leite oriundo do produtor B	$P(B) = 0.30$
$C =$ leite oriundo do produtor C	$P(C) = 1 - 0.3 - 0.3 = 0.40$
$D =$ leite adulterado com adição de água	$P(D) =?$
$D\|A =$ leite adulterado com adição de água dado que é oriundo do produtor A	$P(D\|A) = 0.10$
$D\|B =$ leite adulterado com adição de água dado que é oriundo do produtor B	$P(D\|B) = 0.05$
$D\|C =$ leite adulterado com adição de água dado que é oriundo do produtor C	$P(D\|C) = 0.03$

• **Prob. pedida**

Aplicando o teorema da probabilidade total (fazendo uso da partição $\{A, B, C\}$), tem-se

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) \\ &= 0.10 \times 0.30 + 0.05 \times 0.30 + 0.03 \times 0.40 = 0.057. \end{aligned}$$

(b) • **Prob. pedida**

Aplicando agora o teorema de Bayes, tem-se

$$P[(A \cup B)|D) = 1 - P(C|D) = 1 - \frac{P(D|C) \times P(C)}{P(D)} = 1 - \frac{0.03 \times 0.40}{0.057} \simeq 0.7895.$$

Exercício 2

(a) • **V.a.**

$X_1 =$ número de erros tipográficos em uma página de um livro

• **Distribuição de X_1**

$X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$

• **Parâmetro**

$$\begin{aligned} \lambda_1 \quad &: \quad E(X_1) = 0.5 \\ & \quad\quad \lambda_1 = 0.5 \end{aligned}$$

• **F.p. de X_1**

$P(X_1 = x) = \frac{e^{-0.5} \times 0.5^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

- **Outra v.a.**
  X_3 = número de erros tipográficos em três página de um livro
- **Distribuição de X_3**
  Invocando a propriedade reprodutiva da distribuição de Poisson, conclui-se que:
  $X_3 \sim \text{Poisson}(\lambda_3 = 3 \times \lambda_1 = 1.5)$
- **F.p. de X_3**
  $P(X_3 = x) = \frac{e^{-1.5} \times 1.5^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$
- **Prob. pedida**

$$P(X_3 = 0) = \frac{e^{-1.5} \times 1.5^0}{0!} = e^{-1.5} \simeq 0.2231$$

(b)
- **V.a.**
  Y = número de páginas com pelo menos um erro tipográfico, em 10 seleccionadas ao acaso
- **Distribuição de Y**
  $Y \sim \text{binomial}(n, p)$
- **Parâmetros**

$$\begin{aligned} n &= 10 \\ p &= P(\text{página com pelo menos um erro tipográfico}) \\ &= P(X_1 \geq 1) = 1 - P(X_1 = 0) \\ &\stackrel{a)}{=} 1 - e^{-0.5} \simeq 0.3935 \simeq 0.4. \end{aligned}$$

- **F.p. de Y**
  $P(Y = y) = \binom{10}{y} (1 - e^{-0.5})^y \, (e^{-0.5})^{10-y}$, $y = 0, 1, 2, \ldots, 10$
- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y \leq 1) = 1 - F_{binomial(10, 1-e^{-0.5})}(1) \\ &\simeq \begin{cases} 1 - F_{binomial(10,0.4)}(1) \stackrel{tabela}{=} 1 - 0.0464 = 0.9536, & p \simeq 0.4 \\ 1 - 0.0504 = 0.9496, & p \simeq 1 - e^{-0.5}. \end{cases} \end{aligned}$$

(c)
- **V.a.**
  W = número de páginas a inspeccionar até encontrar a 1a. com pelo menos um erro tipográfico
- **Distribuição de W**
  $W \sim \text{geométrica}(p)$
- **Parâmetros**
  $p = P(\text{página que contenha pelo menos um erro tipográfico}) = P(X_1 \geq 1) = 1 - P(X_1 = 0) \stackrel{a)}{=} 1 - e^{-0.5}$
- **F.p. de W**
  $P(W = w) = (e^{-0.5})^{w-1} \, (1 - e^{-0.5})$, $w = 1, 2, \ldots$
- **Valor esperado de W**
  $E(W) \stackrel{form}{=} \frac{1}{p} = \frac{1}{1-e^{-0.5}} \simeq \begin{cases} 2.5415, & p = 1 - e^{-0.5} \\ 2.5413, & p \simeq 0.3935 \\ 2.5, & p \simeq 0.4 \end{cases}$
- **F.d. de W**

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(W \leq w) \\ &= \begin{cases} 0, & w < 1 \\ \sum_{i=1}^{[w]} (1-p)^{i-1} \, p = p \sum_{i=0}^{[w]-1} (1-p)^i = p \, \frac{1-(1-p)^{[w]}}{1-(1-p)} = 1 - (1-p)^{[w]}, & w \geq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

  onde $[w]$ representa a parte inteira do real w.

- **Mediana de W**

Atendendo ao facto a mediana da v.a. discreta W, $me = me(W)$, verificar a dupla desigualdade

$$\begin{cases} P(W \leq me) \geq \frac{1}{2} \\ P(W \geq me) \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} me \quad : \quad & \frac{1}{2} \leq F_W(me) \leq \frac{1}{2} + P(W = me) \\ & F_W(me^-) \leq \frac{1}{2} \leq F_W(me), \end{aligned}$$

pode construir-se a seguinte tabela que servirá para identificar a(s) mediana(s) de X:

Candidato a me	$F_W(me^-) \leq \frac{1}{2} \leq F_W(me)$	Obs.
1	$F_W(1^-) = 0 \leq \frac{1}{2} \leq F_W(1) \simeq 0.4$	Prop. Falsa
2	$F_W(2^-) = F_W(1) \simeq 0.4 \leq \frac{1}{2} \leq F_W(2) \simeq 0.64$	Prop. VERDADEIRA
3	$F_W(3^-) = F_W(2) \simeq 0.64 \leq \frac{1}{2} \leq F_W(3) \simeq 0.784$	Prop. Falsa

Deste modo, conclui-se que $me = 2$.[1]

[1]Note-se que $w = 2+\epsilon$, $\epsilon \in (0,1)$, não é mediana de W dado que $F_W[(2+\epsilon)^-) = F_W(2) \simeq 0.64 \not\leq \frac{1}{2} \leq F_W(2+\epsilon) = F_W(2) \simeq 0.64$.

Grupo II	**1.5 + 3.0 + 1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.0 = 10.0** valores

Exercício 1

(a)

- **V.a.**

  $X =$ duração (em minutos) de uma chamada telefónica

- **Distribuição de X**

  $X \sim \text{exponencial}(\lambda)$

- **F.d.p. de X**

  $f_X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda\, x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

- **Parâmetro**

$$\begin{aligned} \lambda \quad : \quad & P(X > 40) = e^{-1} \\ & \int_{40}^{+\infty} f_X(x)\, dx = e^{-1} \\ & \int_{40}^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda\, x}\, dx = e^{-1} \\ & -e^{-\lambda\, x}\Big|_{40}^{+\infty} = e^{-1} \\ & e^{-\lambda \times 40} = e^{-1} \\ & 40\,\lambda = 1 \\ & \lambda = \frac{1}{40} = 0.025. \end{aligned}$$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X > 60) &= \int_{60}^{+\infty} f_X(x)\, dx = \int_{60}^{+\infty} 0.025\, e^{-0.025\, x}\, dx \\ &= -e^{-0.025\, x}\Big|_{60}^{+\infty} = e^{-0.025 \times 60} \simeq 0.2231. \end{aligned}$$

(b)

- **V.a.**

  $X_i =$ duração (em minutos) da $i-$ésima chamada telefónica, $i = 1, \ldots, 50$

- **Distribuição de X_i**

  $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X$, $i = 1, \ldots, 50$

  $X \sim \text{exponencial}(0.025)$

- **Valor esperado e de variância X_i**

  $E(X_i) = \frac{1}{\lambda} \overset{a)}{=} 40$

  $V(X_i) \overset{form}{=} \frac{1}{\lambda^2} \overset{a)}{=} 40^2 < +\infty$

- **Nova v.a.**

  $Y = \sum_{i=1}^{50} X_i =$ duração total (em minutos) de 50 chamadas telefónicas

- **Valor esperado e variância de Y**

  $E(Y) \overset{X_i \sim X}{=} 50 \times E(X) = 50 \times 40 = 2000$

  $V(Y) \overset{X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X}{=} 50 \times V(X) = 50 \times 40^2 = 80000$

- **Distribuição aproximada de Y**

  Pelo Teorema do Limite Central (TLC) pode escrever-se

$$\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \overset{a}{\sim} \text{Normal}(0, 1).$$

- **Valor aproximado da prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(Y > 30\times 60) &= 1 - P\left[\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \leq \frac{1800-E(Y)}{\sqrt{V(Y)}}\right] \\ &\overset{TLC}{\simeq} 1-\Phi\left(\frac{1800-2000}{\sqrt{80000}}\right) \\ &\simeq 1-\Phi(-0.71) = \Phi(0.71) \overset{tabela}{=} 0.7611. \end{aligned}$$

(c)
- **Obtenção da duração máxima que é excedida por pelo menos 75% das chamadas**

  Pretende obter-se

$$x_{max} = \max\{x : P(X > x) \geq 0.75\}.$$

Ora,

$$\begin{aligned} P(X > x) &\geq 0.75 \\ \int_x^{+\infty} 0.025\, e^{-0.025\, t}\, dt &\geq 0.75 \\ e^{-0.025\, x} &\geq 0.75 \\ -0.025\, x &\geq \ln(0.75) \\ x &\leq -\frac{1}{0.025}\ln(0.75), \end{aligned}$$

pelo que $x_{max} = -\frac{1}{0.025}\ln(0.75) \simeq 11.5073$ minutos.

Exercício 2

(a)
- **Par aleatório**

  (X, Y)
- **F.p. conjunta**

X	Y = -1	Y = 0	Y = 1
-1	0.10	0.15	0.10
0	0.15	0	0.30
1	0.05	0.05	0.10

- **F.p. marginal de Y**

$$\begin{aligned} P(Y=y) &= \sum_{x=-1}^{1} P(X=x, Y=y) \\ &= \begin{cases} 0.10+0.15+0.05 = 0.30, & y=-1 \\ 0.15+0+0.05 = 0.20, & y=0 \\ 0.10+0.30+0.10 = 0.50, & y=1 \\ 0, & \text{outros valores de } y \end{cases} \end{aligned}$$

- **Moda de Y**

  A mera observação da f.p. marginal de Y leva-nos a concluir que o valor mais frequente de Y é $mo = mo(Y) = \arg\max_y P(Y=y) = 1$.

(b)
- **V.a.**

  $X|Y=0$

- **F.p. de** $X|Y=0$

$$\begin{aligned} P(X=x|Y=0) &= \frac{P(X=x,Y=0)}{P(Y=0)} \\ &= \begin{cases} \frac{0.15}{0.20}=0.75, & x=-1 \\ \frac{0.05}{0.20}=0.25, & x=1 \\ 0, & \text{restantes valores de } x \end{cases} \end{aligned}$$

- **Valor esperado de** $X|Y=0$

$$\begin{aligned} E(X|Y=0) &= \sum_x x \times P(X=x|Y=0) \\ &= (-1)\times 0.75 + 1 \times 0.25 \\ &= -0.5 \end{aligned}$$

- **2o. momento de** $X|Y=0$

$$\begin{aligned} E(X^2|Y=0) &= \sum_x x^2 \times P(X=x|Y=0) \\ &= (-1)^2 \times 0.75 + 1^2 \times 0.25 \\ &= 1 \end{aligned}$$

- **Variância de** $X|Y=0$

$$\begin{aligned} V(X|Y=0) &= E(X^2|Y=0) - E^2(X|Y=0) \\ &= 1 - 0.5^2 \\ &= 0.75 \end{aligned}$$

(c)

- **Caracterização geral de** $E(X|Y)$
  A v.a. $E(X|Y)$ toma valor

$$E(X|Y=y) = \sum_x x \times P(X=x|Y=y)$$

  com probabilidade igual a $P(Y=y)$.

- **Valores de** $E(X|Y)$

$$\begin{aligned} E(X|Y=y) &= \sum_x x \times P(X=x|Y=y) \\ &= \sum_x x \times \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)} \\ &= \begin{cases} (-1)\times\frac{0.10}{0.30} + 0 \times \frac{0.15}{0.30} + 1 \times \frac{0.05}{0.30} = -\frac{1}{6}, & y=-1 \\ (-1)\times\frac{0.15}{0.20} + 0 \times \frac{0}{0.20} + 1 \times \frac{0.05}{0.20} \stackrel{a)}{=} -0.5, & y=0 \\ (-1)\times\frac{0.10}{0.50} + 0 \times \frac{0.30}{0.50} + 1 \times \frac{0.10}{0.50} = 0, & y=1 \end{cases} \end{aligned}$$

- **F.p. de** $Z=E(X|Y)$

$$P(Z=z) = \begin{cases} P(Y=-1)=0.30, & z=E(X|Y=-1)=-\frac{1}{6} \\ P(Y=0)=0.20, & z=E(X|Y=0)=-0.5 \\ P(Y=1)=0.50, & z=E(X|Y=1)=0 \\ 0, & \text{outros valores de } z \end{cases}$$