Departamento de Matemática

Probabilidades e Estatística

LEE, LEGI, LMAC, LEMat, LERC, LQ, MEAmbi, MEBiol, MEBiom, MEEC, MEFT, MEQ

2º semestre – 2010/2011 | 1º Teste - Código **D**

16/4/2011 – **11** horas | Duração: 1 hora e 30 minutos

Grupo I **2.5 + 1.5 + 1.5 + 2.5 + 2.0 = 10.0** valores

Exercício 1

(a) • **Quadro de eventos e probabilidades**

Evento	Probabilidade
$A =$ leite oriundo do produtor A	$P(A) = 0.40$
$B =$ leite oriundo do produtor B	$P(B) = 0.30$
$C =$ leite oriundo do produtor C	$P(C) = 1 - 0.4 - 0.3 = 0.30$
$D =$ leite adulterado com adição de água	$P(D) = ?$
$D\|A =$ leite adulterado com adição de água dado que é oriundo do produtor A	$P(D\|A) = 0.03$
$D\|B =$ leite adulterado com adição de água dado que é oriundo do produtor B	$P(D\|B) = 0.05$
$D\|C =$ leite adulterado com adição de água dado que é oriundo do produtor C	$P(D\|C) = 0.1$

• **Prob. pedida**

Aplicando o teorema da probabilidade total (fazendo uso da partição $\{A, B, C\}$), tem-se

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) \\ &= 0.03 \times 0.30 + 0.05 \times 0.30 + 0.1 \times 0.30 = 0.057. \end{aligned}$$

(b) • **Prob. pedida**

Aplicando agora o teorema de Bayes, tem-se

$$\begin{aligned} P[(B \cup C)|D] &= 1 - P(A|D) = 1 - \frac{P(D|A) \times P(A)}{P(D)} \\ &= 1 - \frac{0.03 \times 0.40}{0.057} \simeq 0.7895. \end{aligned}$$

Exercício 2

(a) • **V.a.**

$X_1 =$ número de erros tipográficos em uma página de um livro

• **Distribuição de X_1**

$X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$

• **Parâmetro**

$$\begin{aligned} \lambda_1 \quad : \quad & E(X_1) = 0.5 \\ & \lambda_1 = 0.5 \end{aligned}$$

• **F.p. de X_1**

$P(X_1 = x) = \frac{e^{-0.5} \times 0.5^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

- **Outra v.a.**
  $X_2 =$ número de erros tipográficos em duas página de um livro
- **Distribuição de X_2**
  Invocando a propriedade reprodutiva da distribuição de Poisson, conclui-se que:
  $X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2 = 2 \times \lambda_1 = 1)$
- **F.p. de X_3**
  $P(X_2 = x) = \frac{e^{-1} \times 1^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$
- **Prob. pedida**

$$P(X_2 \geq 1) \quad = \quad 1 - P(X_2 = 0) = 1 - e^{-1} \simeq 0.6321.$$

(b)

- **V.a.**
  $Y =$ número de páginas com pelo menos um erro tipográfico, em 8 seleccionadas ao acaso
- **Distribuição de Y**
  $Y \sim \text{binomial}(n, p)$
- **Parâmetros**

$$\begin{aligned} n &= 8 \\ p &= P(\text{página com pelo menos um erro tipográfico}) \\ &= P(X_1 \geq 1) = 1 - P(X_1 = 0) \stackrel{a)}{=} 1 - e^{-0.5} \\ &\simeq 0.3935 \simeq 0.4. \end{aligned}$$

- **F.p. de Y**
  $P(Y = y) = \binom{8}{y} (1 - e^{-0.5})^y \, (e^{-0.5})^{8-y}$, $y = 0, 1, 2, \ldots, 8$
- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(Y \geq 3) &= 1 - P(Y \leq 2) = 1 - F_{binomial(8, 1-e^{-0.5})}(2) \\ &\simeq \begin{cases} 1 - F_{binomial(8,0.4)}(2) \stackrel{tabela}{=} 1 - 0.3154 = 0.6846, & p \simeq 0.4 \\ 1 - 0.3291 = 0.6709, & p \simeq 1 - e^{-0.5}. \end{cases} \end{aligned}$$

(c)

- **V.a.**
  $W =$ número de páginas a inspeccionar até encontrar a 1a. com pelo menos um erro tipográfico
- **Distribuição de W**
  $W \sim \text{geométrica}(p)$
- **Parâmetros**
  $p = P(\text{página que contenha pelo menos um erro tipográfico}) = P(X_1 \geq 1) = 1 - P(X_1 = 0) \stackrel{a)}{=} 1 - e^{-0.5}$
- **F.p. de W**
  $P(W = w) = (e^{-0.5})^{w-1} \, (1 - e^{-0.5})$, $w = 1, 2, \ldots$
- **Valor esperado de W**
  $E(W) \stackrel{form}{=} \frac{1}{p} = \frac{1}{1-e^{-0.5}} \simeq \begin{cases} 2.5415, & p = 1 - e^{-0.5} \\ 2.5413, & p \simeq 0.3935 \\ 2.5, & p \simeq 0.4 \end{cases}$
- **F.d. de W**

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(W \leq w) \\ &= \begin{cases} 0, & w < 1 \\ \sum_{i=1}^{[w]} (1-p)^{i-1} \, p = p \, \sum_{i=0}^{[w]-1} (1-p)^i = p \, \frac{1-(1-p)^{[w]}}{1-(1-p)} = 1 - (1-p)^{[w]}, & w \geq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

onde $[w]$ representa a parte inteira do real w.

- **Mediana de W**

Atendendo ao facto a mediana da v.a. discreta W, $me = me(W)$, verificar a dupla desigualdade

$$\begin{cases} P(W \leq me) \geq \frac{1}{2} \\ P(W \geq me) \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} me \quad : \quad & \frac{1}{2} \leq F_W(me) \leq \frac{1}{2} + P(W = me) \\ & F_W(me^-) \leq \frac{1}{2} \leq F_W(me), \end{aligned}$$

pode construir-se a seguinte tabela que servirá para identificar a(s) mediana(s) de X:

Candidato a me	$F_W(me^-) \leq \frac{1}{2} \leq F_W(me)$	Obs.
1	$F_W(1^-) = 0 \leq \frac{1}{2} \leq F_W(1) \simeq 0.4$	Prop. Falsa
2	$F_W(2^-) = F_W(1) \simeq 0.4 \leq \frac{1}{2} \leq F_W(2) \simeq 0.64$	Prop. Verdadeira
3	$F_W(3^-) = F_W(2) \simeq 0.64 \leq \frac{1}{2} \leq F_W(3) \simeq 0.784$	Prop. Falsa

Deste modo, conclui-se que $me = 2$.[1]

[1]Note-se que $w = 2+\epsilon$, $\epsilon \in (0,1)$, não é mediana de W dado que $F_W[(2+\epsilon)^-) = F_W(2) \simeq 0.64 \not\leq \frac{1}{2} \leq F_W(2+\epsilon) = F_W(2) \simeq 0.64$.

Grupo II	**1.5 + 3.0 + 1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.0 = 10.0** valores

Exercício 1

(a)

- **V.a.**
  $X =$ duração (em minutos) de uma chamada telefónica
- **Distribuição de X**
  $X \sim$ exponencial(λ)
- **F.d.p. de X**
  $f_X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda\, x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- **Parâmetro**

$$\begin{aligned} \lambda \quad : \quad & P(X > 40) = e^{-2} \\ & \int_{40}^{+\infty} f_X(x)\, dx = e^{-2} \\ & \int_{40}^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda\, x}\, dx = e^{-2} \\ & -e^{-\lambda\, x}\Big|_{40}^{+\infty} = e^{-2} \\ & e^{-\lambda \times 40} = e^{-2} \\ & 40\, \lambda = 2 \\ & \lambda = \frac{2}{40} = 0.05. \end{aligned}$$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X > 30) &= \int_{30}^{+\infty} f_X(x)\, dx = \int_{30}^{+\infty} 0.05\, e^{-0.05\, x}\, dx \\ &= -e^{-0.05\, x}\Big|_{30}^{+\infty} = e^{-0.05 \times 30} \simeq 0.2231. \end{aligned}$$

(b)

- **V.a.**
  $X_i =$ duração (em minutos) da $i-$ésima chamada telefónica, $i = 1, \ldots, 50$
- **Distribuição de X_i**
  $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} X$, $i = 1, \ldots, 50$
  $X \sim$ exponencial(0.05)
- **Valor esperado e de variância X_i**
  $E(X_i) = \frac{1}{\lambda} \stackrel{a)}{=} 20$
  $V(X_i) \stackrel{form}{=} \frac{1}{\lambda^2} \stackrel{a)}{=} 20^2 < +\infty$
- **Nova v.a.**
  $Y = \sum_{i=1}^{50} X_i =$ duração total (em minutos) de 50 chamadas telefónicas
- **Valor esperado e variância de Y**
  $E(Y) \stackrel{X_i \sim X}{=} 50 \times E(X) = 50 \times 20 = 1000$
  $V(Y) \stackrel{X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} X}{=} 50 \times V(X) = 50 \times 20^2 = 20000$
- **Distribuição aproximada de Y**
  Pelo Teorema do Limite Central (TLC) pode escrever-se

$$\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \stackrel{a}{\sim} \text{Normal}(0, 1).$$

- **Valor aproximado da prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(Y > 15 \times 60) &= 1 - P\left[\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \leq \frac{900 - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}}\right] \\ &\stackrel{TLC}{\simeq} 1 - \Phi\left(\frac{900 - 1000}{\sqrt{20000}}\right) \simeq 1 - \Phi(-0.71) = \Phi(0.71) \stackrel{tabela}{=} 0.7611. \end{aligned}$$

(c) • **Obtenção da duração mínima que não é excedida por pelo menos 25% das chamadas**

Pretende obter-se

$$x_{min} = \min\{x : P(X \leq x) \geq 0.25\}.$$

Ora,

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &\geq 0.25 \\ \int_0^x 0.05\, e^{-0.05\, t}\, dt &\geq 0.25 \\ 1 - e^{-0.05\, x} &\geq 0.25 \\ e^{-0.05\, x} &\leq 0.75 \\ x &\geq -\frac{\ln(0.75)}{0.05}, \end{aligned}$$

pelo que $x_{min} = -\frac{\ln(0.75)}{0.05} \simeq 5.75364$ minutos.

Exercício 2

(a) • **Par aleatório**

(X, Y)

• **F.p. conjunta**

X	Y		
	-1	0	1
-1	0.10	0.15	0.10
0	0.15	0	0.30
1	0.05	0.05	0.10

• **F.p. marginal de X**

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \sum_{y=-1}^{1} P(X = x, Y = y) \\ &= \begin{cases} 0.10 + 0.15 + 0.05 = 0.30, & x = -1 \\ 0.15 + 0 + 0.05 = 0.20, & x = 0 \\ 0.10 + 0.30 + 0.10 = 0.50, & x = 1 \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases} \end{aligned}$$

• **Moda de X**

A mera observação da f.p. marginal de X leva-nos a concluir que o valor mais frequente de X é $mo = mo(X) = \arg\max_x P(X = x) = 1$.

(b) • **V.a.**

$Y|X = 0$

• **F.p. de $Y|X = 0$**

$$\begin{aligned} P(Y = y|X = 0) &= \frac{P(X = 0, Y = y)}{P(X = 0)} \\ &= \begin{cases} \frac{0.15}{0.20} = 0.75, & y = -1 \\ \frac{0.05}{0.20} = 0.25, & y = 1 \\ 0, & \text{restantes valores de } y \end{cases} \end{aligned}$$

• **Valor esperado de $Y|X = 0$**

$$\begin{aligned} E(Y|X = 0) &= \sum_y y \times P(Y = y|X = 0) \\ &= (-1) \times 0.75 + 1 \times 0.25 \\ &= -0.5 \end{aligned}$$

- **2o. momento de** $Y|X=0$

$$\begin{aligned}
E(Y^2|X=0) &= \sum_y y^2 \times P(Y=y|X=0) \\
&= (-1)^2 \times 0.75 + 1^2 \times 0.25 \\
&= 1
\end{aligned}$$

- **Variância de** $Y|X=0$

$$\begin{aligned}
V(Y|X=0) &= E(Y^2|X=0) - E^2(Y|X=0) \\
&= 1 - 0.5^2 \\
&= 0.75
\end{aligned}$$

(c)

- **Caracterização geral de** $E(Y|X)$

A v.a. $E(Y|X)$ toma valor

$$E(Y|X=x) = \sum_y y \times P(Y=y|X=x)$$

com probabilidade igual a $P(X=x)$.

- **Valores de** $E(Y|X)$

$$\begin{aligned}
E(Y|X=x) &= \sum_y y \times P(Y=y|X=x) \\
&= \sum_y y \times \frac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)} \\
&= \begin{cases}
(-1)\times\frac{0.10}{0.30} + 0\times\frac{0.15}{0.30} + 1\times\frac{0.05}{0.30} = -\frac{1}{6}, & x=-1 \\
(-1)\times\frac{0.15}{0.20} + 0\times\frac{0}{0.20} + 1\times\frac{0.05}{0.20} \stackrel{a)}{=} -0.5, & x=0 \\
(-1)\times\frac{0.10}{0.50} + 0\times\frac{0.30}{0.50} + 1\times\frac{0.10}{0.50} = 0, & x=1
\end{cases}
\end{aligned}$$

- **F.p. de** $Z=E(Y|X)$

$$P(Z=z) = \begin{cases}
P(X=-1)=0.30, & z=E(Y|X=-1)=-\frac{1}{6} \\
P(X=0)=0.20, & z=E(Y|X=0)=-0.5 \\
P(X=1)=0.50, & z=E(Y|X=1)=0 \\
0, & \text{outros valores de } z
\end{cases}$$