1º TESTE (25 JUN 2011) – Código E

Grupo I

1. Sejam os acontecimentos:

M = "indivíduos adultos são do género masculino"

$F \equiv \overline{M}$ = " " " " " " feminino"

Seja $X \to$ altura (em cm) dos indivíduos

$X|M \sim N(173, 3^2)$ $\qquad$ $P(M) = 1 - 0.52 = 0.48$

$X|F \sim N(167, 3^2)$ $\qquad$ $P(F) = 0.52$

a) $P(X>170|M) = 1 - P(X \leq 170|M) = 1 - F_{N(173,3^2)}(170) = 0.8413$

ou

$= 1 - \Phi\left(\frac{170-173}{3}\right) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) = 0.8413$

b) Pelo teorema da probabilidade total,

$$P(X>170) = P(\{X>170\} \cap M) + P(\{X>170\} \cap F)$$

$$= P(M)\,P(X>170|M) + P(F)\,P(X>170|F)$$

$$= 0.48 \times 0.8413 + 0.52 \times 0.1587$$

$$= 0.486348$$

onde

$$P(X>170|F) = 1 - \Phi\left(\frac{170-167}{3}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

2. Lote de $N = 1000$ transistores, sendo que $M = 40$ não satisfazem os critérios de qualidade.

a) Seja $X \to$ nº de transistores que não satisfazem os critérios de qualidade, em 12 transistores seleccionados ao acaso e com reposição do lote.

A v.a. X indica o nº de "sucessos" em 12 provas de Bernoulli independentes, logo

$X \sim Bi(n, p)$, com $n = 12$ e $p = P(\text{"sucesso"}) = \frac{M}{N} = 0.04$

$$P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{12}{k} 0.04^{k} \, 0.96^{12-k} = 0.9893$$

ou

$$= F_X(2) = 0.9893 \quad \text{(valor tabelado)}$$

b) Seja $Y \to$ nº de transistores inspeccionados, ao acaso e com reposição do lote, até ser encontrado o 1º que não satisfaz os critérios de qualidade.

A v.a. Y indica o nº de provas de Bernoulli, independentes, até que ocorra o 1º "sucesso", logo

$Y \sim$ Geométrica(p), com $p = P(\text{"sucesso"}) = 0.04$

$$P(Y > 2) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - \sum_{y=1}^{2} 0.96^{y-1} \times 0.04 = 1 - 0.0784 = 0.9216$$

Alternativa 1

Designando por S_i = "transístor i não satisfaz critérios (sucesso)", com $P(S_i) = 0.04$ e $P(\bar{S}_i) = 0.96$, o espaço de resultados associado à experiência é

$$\Omega = \{ S, \bar{S} S, \bar{S}\bar{S} S, \dots \}$$

Seja A = "ser necessário inspeccionar mais de 2 transístores"

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\{S, \bar{S}S\}) = 1 - P(S_1) - P(\bar{S}_1 \cap S_2) =$$

$$\underset{\bar{S}_1 \perp\!\!\!\perp S_2}{=} 1 - 0.04 - 0.96 \times 0.04 = 0.9216$$

Alternativa 2

$$P(Y > 2) = P(T = 0) = \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 = (1-p)^2 = 0.96^2 = 0.9216$$

onde T indica o nº de transístores, em 2, que não satisfazem os critérios, com $T \sim$ Binomial$(n = 2, p = 0.04)$.

Grupo II

1. Seja $X \to$ procura diária de bolos de aniversário numa confeitaria

$X \sim$ Unif. $\{0,1,2,3,4\}$

a) $f_X(x) \equiv p(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & , x=0,1,2,3,4 \\ 0 & , \text{rest. valores de } x \end{cases}$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{4} x\, p(X=x) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{1}{5} + \dots + 4 \times \frac{1}{5} = \frac{0+1+2+3+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{4} x^2 p(X=x) = \frac{0^2+1^2+2^2+3^2+4^2}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 6 - 2^2 = 2$$

Seja $T = \sum_{i=1}^{90} X_i \to$ procura total de bolos em 90 dias

$E(X_i) = \mu = 2$ e $V(X_i) = \sigma^2 = 2$, $i = 1, \dots, 90$

$$E(T) = \sum_{i=1}^{90} E(X_i) = 90 \times 2 = 180$$

$$V(T) = \sum_{i=1}^{90} V(X_i) = 90 \times 2 = 180$$

Assumindo X_i indep^{tes}

Pelo Teorema do Limite Central ($n = 90$ é superior a 30),

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{T - 180}{\sqrt{180}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

$$p(T \leq 200) \simeq \Phi\left(\frac{200-180}{\sqrt{180}}\right) = \Phi(1.49) = 0.9319 //$$

Nota: Se aplicássemos a correcção de continuidade, falada e usada na aproximação da Binomial e da Poisson à Normal, viria

$$p(T \leq 200) = p(T < 201) \simeq \Phi\left(\frac{200.5-180}{\sqrt{180}}\right) = \Phi(1.53) = 0.9370 //$$

b) Seja $Y \to$ nº de bolos vendidos num dia em que são fabricados 3 bolos.

$$Y = \begin{cases} X & \text{se } X = 0, 1, 2 \\ 3 & \text{se } X = 3, 4 \end{cases}$$

$$P(Y=y) = \begin{cases} \frac{1}{5} & , y = 0, 1, 2 \\ \frac{2}{5} & , y = 3 \\ 0 & , \text{rest. val. de } y \end{cases}$$

(1) Seja $L \to$ lucro (em euros) da venda de bolos num dia em que são fabricados 3 bolos.

$$L = g(Y) = 10Y - 5(3-Y) = 15Y - 15$$

$$E(L) = E(15Y - 15) = 15\,E(Y) - 15 = 15 \times \frac{9}{5} - 15 = 12 \text{ euros}$$

onde

$$E(Y) = \sum_y y\,P(Y=y) = (0+1+2) \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{2}{5} = \frac{9}{5}$$

Alternativa a (1)

$$L = g(Y) = \begin{cases} 0 \times 10 - 3 \times 5 = -15 & \text{se } Y = 0 \\ 1 \times 10 - 2 \times 5 = 0 & \text{se } Y = 1 \\ 2 \times 10 - 1 \times 5 = 15 & \text{se } Y = 2 \\ 3 \times 10 - 0 \times 5 = 30 & \text{se } Y = 3 \end{cases}$$

$$E(L) = E[g(Y)] = \sum_{y=0}^{3} g(y)\,P(Y=y) = (-15+0+15) \times \frac{1}{5} + 30 \times \frac{2}{5} = 12 \text{ euros}$$

2. Sendo X $(Y) \to$ grau de pureza do reagente 1 (2), a f.d.p. conjunta de (X,Y) é

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4x(1-y) & , 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Cálculo da f.d.p. de X

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_0^1 4x(1-y)\,dy = 4x\left[y-\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{rest. val. de } x \end{cases}$$

Cálculo da f.d.p. de Y

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_0^1 4x(1-y)\,dx = 2(1-y)\left[x^2\right]_0^1 = 2(1-y), & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{rest. val. de } y \end{cases}$$

Como $f_X(x) \cdot f_Y(y) = f_{X,Y}(x,y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, conclui-se que as v.a. X e Y são independentes.

b) $P(X \geq 0.5 \mid Y \geq 0.5) = ?$

Os acontecimentos $\{X \geq 0.5\}$ e $\{Y \geq 0.5\}$ são independentes, uma vez que as v.a. X e Y são independentes. Logo,

$$P(X \geq 0.5 \mid Y \geq 0.5) = P(X \geq 0.5) = \int_{0.5}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{0.5}^{1} 2x\,dx =$$

$$= \left[x^2\right]_{0.5}^{1} = 1 - 0.25 = 0.75$$

Alternativa

$$P(X \geq 0.5 \mid Y \geq 0.5) = \frac{P(X \geq 0.5, Y \geq 0.5)}{P(Y \geq 5)} = \frac{3/16}{1/4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

onde

$$P(X \geq 0.5, Y \geq 0.5) = \int_{0.5}^{1}\int_{0.5}^{1} 4x(1-y)\,dx\,dy = \int_{0.5}^{1} 2(1-y)\left[x^2\right]_{0.5}^{1} dy =$$

$$= \frac{3}{2}\left[y - y^2/2\right]_{0.5}^{1} = \frac{3}{16}$$

$$P(Y \geq 0.5) = \int_{0.5}^{1} 2(1-y)\,dy = 2\left[y - y^2/2\right]_{0.5}^{1} = \frac{1}{4}$$