Probabilidades e Estatística

LEGM, LEIC-A, LEIC-T, MEAer, MEMec

2º semestre – 2010/11 — 2º Teste – Código B

09/06/2011 – 14 horas — Duração: 1 hora e 30 minutos

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I — 10 valores

1. Seja X uma variável aleatória que representa o número de fluxos (de tráfego) iniciados por uma aplicação de rede num intervalo de tempo fixo. Admita que X tem distribuição de Poisson de parâmetro λ.

(a) Deduza o estimador de máxima verosimilhança de λ com base numa amostra aleatória de dimensão n, $(X_1, \ldots, X_n)$, proveniente da população X. (3.0)

(b) Obtenha a estimativa de máxima verosimilhança da probabilidade de não haver nenhum fluxo iniciado nesse intervalo de tempo, com base numa amostra de dimensão 200 onde se obteve $\sum_{i=1}^{200} x_i = 1\,314$. (2.0)

2. Numa amostra de 10 baterias de lítio produzidas por determinada empresa, escolhidas ao acaso, observou-se uma duração média de 24 mil horas. Admita que o tempo de vida dessas baterias, em milhares de horas, tem distribuição normal com desvio padrão unitário.

(a) Conjectura-se que a duração esperada das baterias de lítio produzidas pela empresa é igual a 27 mil horas. Teste essa conjectura ao nível de significância de 5%. (3.0)

(b) Calcule a probabilidade de o teste anterior rejeitar correctamente a hipótese nula quando a duração esperada das baterias é igual a 25 mil horas. (2.0)

Grupo II — 10 valores

1. Um grupo de investigadores seleccionou ao acaso 100 ovos de tartaruga tendo medido os seus comprimentos (em centímetros) e resumido os resultados, os quais se encontram na seguinte tabela:

Classe	$]0; 2.5]$	$]2.5; 5/\sqrt{2}]$	$]5/\sqrt{2}; \sqrt{75/4}]$	$]\sqrt{75/4}; 5]$
Freq. abs. observada	26	23	30	21
Freq. abs. esperada sob H_0	E_1	25	E_3	25

Esse grupo afirma que o comprimento dos ovos de tartaruga pode ser modelado por uma variável aleatória, X, com função de distribuição:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{25}, & 0 \le x < 5, \\ 1, & x \ge 5, \end{cases}$$

(a) Complete a tabela acima com os valores das frequências absolutas esperadas sob a validade de $H_0 : X$ tem função de distribuição $G(x), x \in I\!R$. (2.0)

(b) Teste a validade da hipótese H_0 definida na alínea anterior. Decida com base no valor-p. Se não respondeu à alínea anterior, considere $E_1 = E_3 = 25$. (3.5)

2. Um gastroenterologista considera que o modelo de regressão linear simples $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$, com as hipóteses de trabalho habituais, é adequado para descrever o efeito da percentagem de gordura alimentar ingerida, x, no aumento do perímetro abdominal, Y (em cm), numa dada população. Para testar essa convicção, seleccionou ao acaso uma amostra de 30 indivíduos, tendo obtido os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 229.20 \quad \sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 1\,781.58 \quad \sum_{i=1}^{30} y_i = 87.90 \quad \sum_{i=1}^{30} y_i^2 = 263.13 \quad \sum_{i=1}^{30} x_i y_i = 683.55$$

(a) Determine um intervalo de confiança a 99% para o declive da recta de regressão. (3.0)

(b) Tendo por base o intervalo de confiança obtido na alínea anterior, diga o que pode concluir sobre a significância da regressão. (1.5)