Probabilidades e Estatística

LEAN, LEE, LEGI, LERC, LMAC, MEAer, MEAmbi, MEBiol, MEEC, MEMec

2º semestre – 2011/2012 | 1º Teste **B**

21/04/2012 – **11:00** | Duração: 1 hora e 30 minutos

Justifique convenientemente **todas as respostas!**

Grupo I — 10 valores

1. *Um sistema de extracção é constituído por duas bombas idênticas, B_1 e B_2. A empresa responsável pelo fabrico destas bombas de extracção adiantou que, em sistemas deste tipo, a probabilidade de falhar pelo menos uma das duas bombas no período de um ano é 0.07 e que a probabilidade de ambas falharem nesse mesmo período é 0.01.*

(a) *Calcule a probabilidade de B_1 falhar no período de um ano.* (2.0)

- **Quadro de eventos e probabilidades**

Evento	Probabilidade
F_1 = bomba de extracção B_1 falha no período de um ano	$P(F_1) = ?$
F_2 = bomba de extracção B_2 falha no período de um ano	$P(F_2) = P(F_1) = ?$ (bombas idênticas!)
$F_1 \cup F_2$ = pelo menos uma das duas bombas falha no período de um ano	$P(F_1 \cup F_2) = 0.07$
$F_1 \cap F_2$ = ambas as bombas falham no período de um ano	$P(F_1 \cap F_2) = 0.01$

- **Prob. pedida**

Aplicando a regra da adição e o facto de $P(F_1) = P(F_2)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
P(F_1 \cup F_2) &= 0.07 \\
P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) &= 0.07 \\
2 \times P(F_1) - P(F_1 \cap F_2) &= 0.07 \\
P(F_1) &= \frac{0.07 + P(F_1 \cap F_2)}{2} \\
&= \frac{0.07 + 0.01}{2} \\
&= 0.04.
\end{aligned}$$

(b) *Determine a probabilidade de B_2 falhar no período de um ano condicional a que B_1 falhe nesse período.* (1.5)

- **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned}
P(F_2|F_1) &= \frac{P(F_1 \cap F_2)}{P(F_1)} \\
&= \frac{P(F_1 \cap F_2)}{P(F_1)} \\
&= \frac{0.01}{0.04} \\
&= 0.25.
\end{aligned}$$

(c) *Indique, justificando, se as bombas de extracção falham de modo independente no período de um ano.* (1.0)

- **Averiguação de independência entre F_1 e F_2**
  Relembre-se que os eventos A e B são INDEPENDENTES se e só se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
  Ora,
  $$\begin{aligned} P(F_1 \cap F_2) &= 0.01 \\ &\neq P(F_1) \times P(F_2) \\ &= 0.04 \times 0.04 \\ &= 0.0016, \end{aligned}$$
  pelo que F_1 e F_2 são eventos DEPENDENTES.

Resolução alternativa

- **Averiguação de independência entre F_1 e F_2**
  É sabido que, caso A e B sejam eventos INDEPENDENTES (com probabilidades não nulas), $P(A|B) = P(B)$ e $P(B|A) = P(B)$.
  Ora,
  $$\begin{aligned} P(F_2|F_1) &= 0.25 \\ &\neq P(F_2) \\ &= 0.04, \end{aligned}$$
  pelo que pode concluir-se que F_1 e F_2 são eventos DEPENDENTES.

2. *Numa grande instituição bancária,* 6% *das pessoas empregadas são programadoras de profissão,* 50% *das pessoas empregadas são mulheres e* 4% *das mulheres empregadas são programadoras de profissão.*

(a) *Identifique a distribuição da variável aleatória que representa o número de pessoas da instituição que são seleccionadas, ao acaso e com reposição, até ser detectado pela primeira vez um homem programador de profissão e indique o valor esperado e o desvio padrão dessa variável aleatória.* (3.0)

- **V.a.**
  $X =$ número de empregadas/os que são seleccionadas/os casualmente e com reposição até ser detectado o primeiro homem cuja profissão seja "programador"
- **Distribuição de X**
  A v.a. X corresponde ao número total de provas de Bernoulli i.i.d. realizadas até à ocorrência do primeiro sucesso. Assim,
  $$X \sim \text{Geométrica}(p)$$
- **Parâmetro**
  Sejam M, H e P os eventos seleccionar casualmente "uma mulher", "um homem" e "um/a programador/a", respectivamente. Então é sabido que
  $$\begin{aligned} P(M) &= P(H) \\ &= 0.5 \\ P(P) &= 0.06 \\ P(P|M) &= 0.04. \end{aligned}$$
  Logo
  $$\begin{aligned} p &= P(\text{homem e programador}) \\ &= P(H \cap P) \\ &= P(P) - P(M \cap P) \\ &= P(P) - P(P|M) \times P(M) \\ &= 0.06 - 0.04 \times 0.5 \\ &= 0.04. \end{aligned}$$

- **Valor esperado de X**
  $E(X) \stackrel{form}{=} \frac{1}{p} = 25$
- **Variância de X**
  $V(X) \stackrel{form}{=} \frac{1-p}{p^2} = 600$
- **Desvio padrão de Y**
  $DP(Y) = +\sqrt{V(Y)} \simeq 24.50$

(b) *Admita agora que foram seleccionadas, ao acaso e sem reposição, 20 pessoas da instituição. Calcule um valor aproximado da probabilidade de pelo menos duas delas serem programadoras de profissão.* (2.5)

- **V.a.**
  Y = número de pessoas numa amostra de 100 seleccionadas ao acaso e SEM reposição daquela instituição com N pessoas empregadas das quais M são programadoras.
- **Distribuição de X**
  $Y \sim$ Hipergeométrica(N, M, n)
- **Parâmetros**
  N pessoas (todos/as trabalhadores/as da instituição)
  $M = N \times P(P) = N \times 0.06$ pessoas programadoras
  $n = 20$ pessoas seleccionadas ao acaso e SEM reposição
- **V.a. aproximativa**
  Admitindo que $n = 20 < 0.1 \times N$, pode aproximar-se a f.p. da v.a.
  $$Y \sim \text{Hipergeométrica}(N, M, n)$$
  pela f.p. da v.a. aproximativa
  $$\tilde{Y} \sim \text{Binomial}\left(n = 20, p = \frac{M}{N} = 0.06\right)$$
- **F.p. de $\tilde{Y}$**
  $P(\tilde{Y} = y) = \binom{20}{y} \times 0.06^x \times (1 - 0.06)^{20-y}$, $y = 0, 1, \ldots, 20$
- **Prob. pedida — valor aproximado**
  $$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y \leq 1) \\ &\simeq 1 - P(\tilde{Y} \leq 1) \\ &= 1 - F_{Binomial(20,0.06)}(1) \\ &\stackrel{tabela}{=} 1 - 0.6605 \\ &\simeq 0.3395. \end{aligned}$$

Grupo II	10 valores

1. *Sejam X e Y variáveis aleatórias que indicam o número de parafusos, de um conjunto de dois parafusos analisados, que não satisfazem as especificações relativas ao comprimento e ao diâmetro, respectivamente. Suponha que a função de probabilidade conjunta de X e Y é dada por:*

(a) *Calcule a covariância entre X e Y. O que pode concluir relativamente à independência entre X e Y?* (2.5)

- **Par aleatório**
  X = número de parafusos que não satisfazem as especificações relativas ao comprimento
  Y = número de parafusos que não satisfazem as especificações relativas ao diâmetro

- **F.p. conjunta e f.p. marginais**
  $P(X=x, Y=y)$, $P(X=x)$ e $P(Y=y)$ encontram-se na tabela seguinte:

X	Y			
	0	1	2	$P(X=x)$
0	0.40	0.12	0.08	0.60
1	0.15	0.08	0.03	0.26
2	0.10	0.03	0.01	0.14
$P(Y=y)$	0.65	0.23	0.12	1

- **Covariância entre X e Y**
  Uma vez que se pretende calcular

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

  serão necessários alguns cálculos auxiliares que envolverão as f.p. conjunta de (X,Y) e as f.p. marginais de X e Y.

- **Valor esperado de X**

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{2} x \times P(X=x) = \sum_{x=0}^{2} x \times \left[\sum_{y=0}^{2} P(X=x, Y=y)\right] \\ &= 0 \times 0.6 + 1 \times 0.26 + 2 \times 0.14 \\ &= 0.54 \end{aligned}$$

- **Valor esperado de Y**

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y=0}^{2} y \times P(Y=y) = \sum_{y=0}^{2} y \times \left[\sum_{x=0}^{2} P(X=x, Y=y)\right] \\ &= 0 \times 0.65 + 1 \times 0.23 + 2 \times 0.12 \\ &= 0.47 \end{aligned}$$

- **Momento cruzado de X e Y de ordem $(1,1)$**

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xy \times P(X=x, Y=y) \\ &= 1 \times 1 \times 0.08 + 1 \times 2 \times 0.03 + 2 \times 1 \times 0.03 + 2 \times 2 \times 0.01 \\ &= 0.24 \end{aligned}$$

- **Conclusão**

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= 0.24 - 0.54 \times 0.47 \\ &= -0.0138 \end{aligned}$$

- **Comentário**
  Visto que $cov(X,Y) = -0.0138 \neq 0$ pode concluir-se que X e Y são v.a. DEPENDENTES.

(b) *Determine* $E(Y|X \leq 1)$. (2.5)

- **V.a.**
  $Y|X \leq 1$

- **F.p. de $Y|X \leq 1$**
  Na alínea anterior obteve-se a f.p. marginal de X, pelo que pode adiantar-se que

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X=0) + P(X=1) \\ &= 0.60 + 0.26 \\ &= 0.86. \end{aligned}$$

Resta adiantar que:

$$\begin{aligned}
P(Y=0|X\leq 1) &= \frac{P(X\leq 1, Y=0)}{P(X\leq 1)}\\
&= \frac{P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)}{P(X\leq 1)}\\
&= \frac{0.40+0.15}{0.86}\\
&= \frac{55}{86};\\
P(Y=1|X\leq 1) &= \frac{P(X\leq 1, Y=1)}{P(X\leq 1)}\\
&= \frac{P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)}{P(X\leq 1)}\\
&= \frac{0.12+0.08}{0.86}\\
&= \frac{20}{86};\\
P(Y=2|X\leq 1) &= \frac{P(X\leq 1, Y=2)}{P(X\leq 1)}\\
&= \frac{P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=2)}{P(X\leq 1)}\\
&= \frac{0.08+0.03}{0.86}\\
&= \frac{11}{86};\\
P(X=x|Y>0) &= 0, \text{ para } x\neq 0,1,2.
\end{aligned}$$

- **Valor esperado de $Y|X\leq 1$**

$$\begin{aligned}
E(Y|X\leq 1) &= \sum_{y=0}^{2} y\times P(Y=y|X\leq 1)\\
&= 0\times\frac{55}{86}+1\times\frac{20}{86}+2\times\frac{11}{86}\\
&= \frac{21}{43}\\
&\simeq 0.488372.
\end{aligned}$$

2. *Num dado modelo de bicicletas, o comprimento entre os centros dos rebites de cada elo da corrente (contribuição do elo para o comprimento da corrente) é uma variável aleatória de valor médio* $0.5\,cm$ *e desvio padrão* $0.04\,cm$. *As normas do correspondente fabricante exigem que o comprimento de uma corrente esteja compreendido entre 49 cm e 50 cm e as correntes comercializadas possuem 99 elos, cujos comprimentos se consideram independentes.*

(a) *Calcule o valor aproximado da probabilidade de uma corrente comercializada, seleccionada ao acaso, satisfazer as normas exigidas.* (3.0)

- **V.a.**
  $X_i =$ contribuição do elo i para o comprimento (em cm) da corrente, $i=1,\ldots,99$
- **Distribuição, valor esperado e variância de X_i**
  $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X$, $i=1,\ldots,99$
  $E(X_i)=E(X)=\mu=0.5$
  $V(X_i)=V(X)=\sigma^2=0.04^2$
- **Nova v.a.**
  $Y=\sum_{i=1}^{99} X_i =$ comprimento (em cm) de uma corrente com 99 elos
- **Valor esperado e variância de Y**
  $E(Y)=E\left(\sum_{i=1}^{99} X_i\right)=\sum_{i=1}^{99} E(X_i) \overset{X_i\sim X}{=} 99\times E(X)=99\times 0.5=49.5$

$V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^{99} X_i\right) \overset{X_i\ indep.}{=} \sum_{i=1}^{99} V(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} 99 \times V(X) = 99 \times 0.04^2 = 0.1584$

- **Distribuição aproximada de** Y

  Pelo Teorema do Limite Central (TLC) pode escrever-se

  $$\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \overset{a}{\sim} \text{Normal}(0,1).$$

- **Prob. pedida — valor aproximado**

$$\begin{aligned}
P(49 \leq Y \leq 50) &= P\left[\frac{49 - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \leq \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \leq \frac{50 - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}}\right] \\
&= P\left[\frac{49 - 49.5}{\sqrt{0.1584}} \leq \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \leq \frac{50 - 49.5}{\sqrt{0.1584}}\right] \\
&\overset{TLC}{\simeq} \Phi\left(\frac{50 - 49.5}{\sqrt{0.1584}}\right) - \Phi\left(\frac{49 - 49.5}{\sqrt{0.1584}}\right) \\
&\simeq \Phi(1.26) - \Phi(-1.26) \\
&= \Phi(1.26) - [1 - \Phi(1.26)] \\
&\overset{tabela}{=} 0.8962 - (1 - 0.8962) \\
&= 0.7924.
\end{aligned}$$

(b) *Determine qual deveria ser o valor aproximado do desvio padrão do comprimento entre os centros dos rebites de cada elo para que 90% das correntes comercializadas cumprissem as normas do fabricante.* (2.0)

- **V.a.**

  $X_i =$ contribuição do elo i para o comprimento (em cm) da corrente, $i = 1, \ldots, 99$

- **Distribuição, valor esperado e variância de** X_i

  $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X$, $i = 1, \ldots, 99$

  $E(X_i) = E(X) = \mu = 0.5$

  $V(X_i) = V(X) = \sigma^2$

- **Nova v.a.**

  $Y = \sum_{i=1}^{99} X_i =$ comprimento (em cm) de uma corrente com 99 elos

- **Parâmetros**

  $E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{99} X_i\right) = \sum_{i=1}^{99} E(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} 99 \times E(X) = 99 \times 0.5 = 49.5$

  $V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^{99} X_i\right) \overset{X_i\ indep.}{=} \sum_{i=1}^{99} V(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} 99 \times V(X) = 99 \times \sigma^2$

- **Distribuição aproximada de** Y

  Aplicando mais uma vez o TLC, pode escrever-se

  $$\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \overset{a}{\sim} \text{Normal}(0,1).$$

- **Valor aproximado de** σ

$$\begin{aligned}
\sigma \quad : \quad & P(49 \leq Y \leq 50) = 0.90 \\
& P\left[\frac{49 - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \leq \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \leq \frac{50 - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}}\right] = 0.90 \\
& P\left[\frac{49 - 49.5}{\sqrt{99\sigma^2}} \leq \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \leq \frac{50 - 49.5}{\sqrt{99\sigma^2}}\right] = 0.90 \\
& \Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{99}\,\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-0.5}{\sqrt{99}\,\sigma}\right) \simeq 0.90 \\
& \Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{99}\,\sigma}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{99}\,\sigma}\right)\right] \simeq 0.90 \\
& 2 \times \Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{99}\,\sigma}\right) - 1 \simeq 0.90
\end{aligned}$$

$$\Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{99}\,\sigma}\right) \simeq \frac{1+0.90}{2}$$
$$\frac{0.5}{\sqrt{99}\,\sigma} \simeq \Phi^{-1}(0.95)$$
$$\frac{0.5}{\sqrt{99}\,\sigma} \overset{tabela}{\simeq} 1.6449$$
$$\sigma \simeq \frac{0.5}{\sqrt{99} \times 1.6449}$$
$$\sigma \simeq 0.030550.$$