Departamento de Matemática

Probabilidades e Estatística

LEGM, LEIC-A, LEIC-T, LEMat, MEBiom, MEFT, MEQ

2º semestre – 2011/2012 — 1º Teste **A**

21/04/2012 – **9:00** — Duração: 1 hora e 30 minutos

Justifique convenientemente **todas as respostas!**

Grupo I	10 valores

1. *A produção de peças de uma empresa provém de 3 máquinas, M_1, M_2 e M_3. As máquinas M_1 e M_2 são responsáveis, respectivamente, por 50% e 30% da produção total. Sabe-se que 5% das peças produzidas pela empresa são defeituosas e que 60% e 30% das peças defeituosas são produzidas, respectivamente, pelas máquinas M_1 e M_2.*

(a) *Calcule a probabilidade de uma peça extraída ao acaso da produção de M_1 ser defeituosa.* (2.0)

- **Quadro de eventos e probabilidades**

Evento	Probabilidade
M_1 = selecção de peça prod. pela maq. M_1	$P(M_1) = 0.50$
M_2 = selecção de peça prod. pela maq. M_2	$P(M_2) = 0.30$
M_3 = selecção de peça prod. pela maq. M_3	$P(M_3) = 1 - P(M_1) - P(M_2)$ $= 0.20$
D = selecção de peça defeituosa	$P(D) = 0.05$
$M_1 \mid D$ = sel. de peça prod. pela maq. M_1 dado que é def.	$P(M_1 \mid D) = 0.60$
$M_2 \mid D$ = sel. de peça prod. pela maq. M_2 dado que é def.	$P(M_2 \mid D) = 0.30$
$M_3 \mid D$ = sel. de peça prod. pela maq. M_3 dado que é def.	$P(M_3 \mid D) = 1 - P(M_1 \mid D) - P(M_2 \mid D)$ $= 0.10$

- **Prob. pedida**

Aplicando o teorema de Bayes, tem-se

$$\begin{aligned}
P(D|M_1) &= \frac{P(D\cap M_1)}{P(M_1)} \\
&= \frac{P(M_1|D)\times P(D)}{P(M_1)} \\
&= \frac{0.60\times 0.05}{0.50} \\
&= 0.06.
\end{aligned}$$

(b) *Qual é a probabilidade de uma peça, extraída ao acaso da produção da empresa, ter sido produzida por M_3 e não ser defeituosa?* (2.0)

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned}
P(M_3\cap\overline{D}) &= P(M_3) - P(M_3\cap D) \\
&= P(M_3) - P(D)\times P(M_3|D) \\
&= \left[1-\sum_{i=1}^{2} P(M_i)\right] - P(D)\times\left[1-\sum_{i=1}^{2} P(M_i|D)\right] \\
&= (1-0.50-0.30) - 0.05\times(1-0.60-0.30) \\
&= 0.20 - 0.05\times 0.10 \\
&= 0.195.
\end{aligned}$$

- **Resolução alternativa**
  Aplicando sucessivamente a lei da probabilidade composta e o Teorema de Bayes, obtém-se:

$$\begin{aligned}
P(M_3 \cap \overline{D}) &= P(M_3) \times P(\overline{D}|M_3) \\
&= P(M_3) \times [1 - P(D|M_3)] \\
&= P(M_3) \times \left[1 - \frac{P(M_3|D) \times P(D)}{P(M_3)}\right] \\
&= \left[1 - \sum_{i=1}^{2} P(M_i)\right] \times \left\{1 - \frac{\left[1 - \sum_{i=1}^{2} P(M_i|D)\right] \times P(D)}{\left[1 - \sum_{i=1}^{2} P(M_i)\right]}\right\} \\
&= (1 - 0.50 - 0.30) \times \left[1 - \frac{(1 - 0.60 - 0.30) \times 0.05}{(1 - 0.50 - 0.30)}\right] \\
&= 0.195.
\end{aligned}$$

2. *Numa empresa fabricante de azulejos quadrados com* $1\,dm$ *de lado, tem-se admitido que os defeitos em azulejos ocorrem segundo um processo de Poisson com taxa de* $0.01/dm^2$.

(a) *Calcule a probabilidade de um azulejo, escolhido ao acaso da produção da fábrica, possuir pelo menos um defeito. Indique o valor esperado e o desvio padrão da variável aleatória que representa o número de defeitos numa superfície, de azulejos do tipo referido, com* $1\,m^2$ *de área.* (3.0)

- **V.a.**
  $X_s =$ número de defeitos em azulejo de s dm^2
- **Distribuição de X_s**
  Ao lidarmos com um processo de Poisson de taxa $\lambda = 0.01/\text{dm}^2$ podemos adiantar que $X_s \sim \text{Poisson}(\lambda_s)$.
- **Parâmetro**
  $\lambda_s = s \times \lambda = 0.01\,s$
- **F.p. de X_s**
  $P(X_s = x) = e^{-0.01\,s} \times \frac{(0.01\,s)^x}{x!}$, $x = 0, 1, \ldots$
- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned}
P(X_1 \geq 1) &= 1 - P(X_1 = 0) \\
&= 1 - e^{-0.01} \\
&\simeq 0.01
\end{aligned}$$

  [A consulta das tabelas conduziria a $P(X_1 \geq 1) = 1 - P(X_1 = 0) = 1 - P(X_1 \leq 0) = 1 - F_{Poisson(0.01)}(0) \stackrel{tabela}{\simeq} 1 - 0.9900 = 0.0100$.]
- **Nova v.a.**
  $X_{100} =$ número de defeitos num pavimento com 1 m^2, (i.e., com 100 dm^2) de área
- **Distribuição de X_{100}**
  $X_{100} \sim \text{Poisson}\,(0.01 \times 100 = 1)$
- **Valor esperado e variância de X_{100}**
  $E(X_{100}) \stackrel{form.}{=} V(X_{100}) \stackrel{form.}{=} 1.$
- **Desvio padrão de X_{100}**
  $DP(X_{100}) = \sqrt{V(X_{100})} \stackrel{form.}{=} \sqrt{1} = 1.$

Resolução alternativa

- **V.a.**
  $X =$ número de defeitos em azulejo de 1 dm^2
- **Distribuição de X**
  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

- **Parâmetros**
  $\lambda = 0.01$
- **F.p. de X**
  $P(X = x) = e^{-0.01}\frac{0.01^x}{x!}$, $x = 0, 1, \ldots$
- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - e^{-0.01} \\ &\simeq 0.0100 \end{aligned}$$

  [A consulta das tabelas conduziria a $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - F_{Poisson(0.01)}(0) \overset{tabela}{\simeq} 1 - 0.9900 = 0.0100$.]
- **Novas v.a.**
  $X_i =$ número de defeitos no $i-$ésimo azulejo de 1 dm^2, $i = 1, \ldots, 100$
  $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i =$ número de defeitos num pavimento com 1 m^2 de área
- **Distribuições**
  $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} \text{Poisson}(\lambda_i = \lambda = 0.01) \sim X$, $i = 1, \ldots, 100$
  $Y \sim \text{Poisson}\left(\sum_{i=1}^{100} \lambda_i = 100 \times 0.01 = 1\right)$ uma vez que a soma de v.a. independentes com distribuições de Poisson também possui distribuição de Poisson.
- **Valor esperado e variância de Y**
  $E(Y) \overset{form.}{=} V(Y) \overset{form.}{=} 1$.
- **Desvio padrão de Y**
  $DP(Y) = \sqrt{V(Y)} \overset{form.}{=} \sqrt{1} = 1$.

(b) *Os azulejos são embalados em caixas de 20 unidades. Calcule a probabilidade de numa caixa existirem mais de 2 azulejos com defeitos. Num lote de 100 caixas, qual é o número esperado de caixas com mais de 2 azulejos com defeitos?* (3.0)

- **V.a.**
  $W =$ número de azulejos com defeitos numa caixa de 20 azulejos
- **Distribuição de W**
  Supondo que os defeitos se distribuem de forma independente em azulejos diferentes, a v.a. indica o número de sucessos em n provas de Bernoulli i.i.d., pelo que
  $W \sim \text{Binomial}(n, p)$
- **Parâmetros**
  $n = 20$
  $p = P(\text{azulejo com defeitos}) \overset{a}{\simeq} 0.01$
- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(W > 2) &= 1 - P(W \leq 2) \\ &\simeq 1 - F_{Binomial(20,0.01)}(2) \\ &\overset{tabela}{=} 1 - 0.9990 \\ &= 0.0010 \end{aligned}$$

- **Nova v.a.**
  $T =$ número de caixas com mais de 2 azulejos com defeitos, em lote com 100 caixas
- **Distribuição de W**
  $T \sim \text{Binomial}(n', p')$
- **Parâmetros**
  $n' = 100$
  $p' = P(\text{caixa com mais de 2 azulejos com defeitos}) = P(W > 2) \simeq 0.001$
- **Valor esperado de T**
  $E(T) \overset{form.}{=} n' \times p' \simeq 100 \times 0.001 = 0.1$

1. *Sejam X e Y variáveis aleatórias que indicam o número de parafusos, de um conjunto de dois parafusos analisados, que não satisfazem as especificações relativas ao comprimento e ao diâmetro, respectivamente. Suponha que a função de probabilidade conjunta de X e Y é dada por:*

X	Y		
	0	1	2
0	0.40	0.12	0.08
1	0.15	0.08	0.03
2	0.10	0.03	0.01

(a) *Calcule $P(X = 0)$ e $P(X = 0|Y > 0)$. O que pode concluir relativamente à independência entre X e Y?* (2.5)

- **Par aleatório**

  $X =$ número de parafusos que não satisfazem as especificações relativas ao comprimento
  $Y =$ número de parafusos que não satisfazem as especificações relativas ao diâmetro

- **F.p. conjunta**

X	Y		
	0	1	2
0	0.40	0.12	0.08
1	0.15	0.08	0.03
2	0.10	0.03	0.01

- **Probabilidades pedidas**

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \sum_{y=0}^{2} P(X = 0, Y = y) \\ &= 0.4 + 0.12 + 0.08 \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 0|Y > 0) &= \frac{P(X = 0, Y > 0)}{P(Y > 0)} \\ &= \frac{P(X = 0, Y > 0)}{1 - P(Y = 0)} \\ &= \frac{\sum_{y=1}^{2} P(X = 0, Y = y)}{1 - \sum_{x=0}^{2} P(X = x, Y = 0)} \\ &= \frac{0.12 + 0.08}{1 - (0.4 + 0.15 + 0.10)} \\ &= \frac{0.20}{0.35} \\ &= \frac{20}{35} \\ &= \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

- **Comentário**

  As v.a. X e Y são independentes se e só se

  $$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y), \forall (x, y) \in I\!R^2,$$

  como consequência, $P(X = 0|Y > 0) = P(X = 0)$.

  Ora, $P(X = 0|Y > 0) \neq P(X = 0)$, pelo que pode concluir-se que X e Y são v.a. DEPENDENTES.

(b) *Determine $E(X|Y>0)$.* (2.5)

- **V.a.**
  $X|Y>0$

- **F.p. de $X|Y>0$**
  Na alínea anterior obteve-se $P(Y>0)=0.35$, bem como
  $$P(X=0|Y>0) = \frac{20}{35}.$$
  Resta adiantar que:
  $$\begin{aligned} P(X=1|Y>0) &= \frac{P(X=1,Y>0)}{P(Y>0)} \\ &= \frac{P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)}{P(Y>0)} \\ &= \frac{0.08+0.03}{0.35} \\ &= \frac{11}{35}; \\ P(X=2|Y>0) &= \frac{P(X=2,Y>0)}{P(Y>0)} \\ &= \frac{P(X=2,Y=1)+P(X=2,Y=2)}{P(Y>0)} \\ &= \frac{0.03+0.01}{0.35} \\ &= \frac{4}{35}; \\ P(X=x|Y>0) &= 0, \text{ para } x \neq 0,1,2. \end{aligned}$$

- **Valor esperado de $X|Y>0$**
  $$\begin{aligned} E(X|Y>0) &= \sum_{x=0}^{2} x \times P(X=x|Y>0) \\ &= 0 \times \frac{20}{35} + 1 \times \frac{11}{35} + 2 \times \frac{4}{35} \\ &= \frac{19}{35} \\ &\simeq 0.542857. \end{aligned}$$

2. *Admita que a duração (em minutos) da viagem de um ferry-boat entre dois portos fluviais é uma variável aleatória com distribuição normal de valor esperado igual a 120 minutos e desvio padrão igual a 6 minutos.*

(a) *Supondo viagens com durações independentes, obtenha a probabilidade de a duração total de 100 dessas viagens exceder 205 horas.* (3.0)

- **V.a.**
  $X_i =$ duração (em minutos) da viagem i, $i=1,\ldots,100$
- **Distribuição, valor esperado e variância de X_i**
  $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X \sim \text{Normal}(\mu,\sigma^2)$, $i=1,\ldots,100$
  $E(X_i)=E(X)=\mu=120$
  $V(X_i)=V(X)=\sigma^2=6^2$
- **Nova v.a.**
  $S=\sum_{i=1}^{100} X_i =$ soma das durações (em minutos) das 100 viagens
- **Distribuição de S**
  Como S é uma soma de v.a. normais independentes segue-se que $S \sim \text{Normal}(E(S), V(S))$.
- **Parâmetros**
  $E(S)=E\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} E(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} 100 \times E(X) = 100 \times 120 = 12000$
  $V(S)=V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{X_i\ indep.}{=} \sum_{i=1}^{100} V(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} 100 \times V(X) = 100 \times 6^2 = 3600$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(S > 205 \times 60) &= 1 - P\left[\frac{S - E(S)}{\sqrt{V(S)}} \leq \frac{205 \times 60 - E(S)}{\sqrt{V(S)}}\right] \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{12300 - 12000}{\sqrt{3600}}\right) \\ &= 1 - \Phi(5) \\ &\simeq 0. \end{aligned}$$

Alternativamente, usando a máquina de calcular:

$$\begin{aligned} P(S > 205 \times 60) &= 1 - F_{N(12000,3600)}(12300) \\ &\simeq 0. \end{aligned}$$

(b) *Calcule o número mínimo de viagens necessárias para que a probabilidade de a respectiva duração total ultrapassar o seu valor esperado em pelo menos 5 horas seja de pelo menos* 5%. (2.0)

- **V.a.**
  $X_i =$ duração (em minutos) da viagem i, $i = 1, \ldots, n$
- **Distribuição, valor esperado e variância de X_i**
  $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$
  $E(X_i) = E(X) = \mu = 120$
  $V(X_i) = V(X) = \sigma^2 = 6^2$
- **Nova v.a.**
  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i =$ soma das durações (em minutos) das n viagens
- **Distribuição de S_n**
  Como S_n é uma soma de v.a. normais independentes segue-se que $S_n \sim \text{Normal}(E(S_n), V(S_n))$.
- **Parâmetros**
  $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} n \times E(X) = 120\, n$
  $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \stackrel{X_i \text{ indep.}}{=} \sum_{i=1}^n V(X_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} n \times V(X) = 36\, n$
- **Valor mínimo pedido**

$$\begin{aligned} n \in I\!N \quad : \quad & P\left[S_n > E(S_n) + 5 \times 60\right] \geq 0.05 \\ & 1 - P\left[\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \leq \frac{E(S_n) + 5 \times 60 - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}\right] \geq 0.05 \\ & 1 - \Phi\left(\frac{5 \times 60}{\sqrt{36\, n}}\right) \geq 0.05 \\ & \frac{50}{\sqrt{n}} \leq \Phi^{-1}(1 - 0.05) \\ & \frac{50}{\sqrt{n}} \leq 1.6449 \\ & n \geq \left(\frac{50}{1.6449}\right)^2 \\ & n \geq 923.9766. \end{aligned}$$

Ou seja, o valor mínimo de viagens é 924.