Departamento de Matemática

Probabilidades e Estatística

LEAN, LEE, LEGI, LEGM, LEIC-A, LEIC-T, LEMat, LERC, LMAC, MEAer, MEAmbi, MEBiol, MEBiom, MEEC, MEFT, MEMec, MEQ

2º semestre – 2011/2012 | **2º TESTE** (Época de recurso)

25/06/2012 – **11:30** | Duração: 1 hora e 30 minutos

Justifique convenientemente **todas as respostas!**

Grupo I 10 valores

1. *Considere uma amostra aleatória* $(X_1, \ldots, X_n)$ *de uma população* X*, representando o tempo de funcionamento (em* 10^3 *h) de uma dada componente electrónica, com função de densidade de probabilidade*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\beta^3}\, e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

onde o parâmetro β *é positivo e desconhecido, sendo que* X *possui valor esperado* 3β *e variância* $3\beta^2$*.*

(a) *Derive o estimador de máxima verosimilhança do parâmetro* β*.* (2.5)

- **V.a. de interesse**
  X = tempo de funcionamento (em 10^3 h)
- **F.d.p. de** X
  $$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\beta^3}\, e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$
- **Parâmetro** DESCONHECIDO
  β $(\beta > 0)$
- **Amostra**
  $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ amostra de dimensão n proveniente da população X
- **Obtenção do estimador de MV de** β

  Passo 1 — Função de verosimilhança
  $$\begin{aligned} L(\beta|\underline{x}) &\stackrel{X_i\ indep}{=} \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \\ &\stackrel{X_i \sim X}{=} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^2}{2\beta^3}\, e^{-\frac{x_i}{\beta}} \right) \\ &= 2^{-n}\, \beta^{-3n}\, e^{-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^{n} x_i^2,\ \beta > 0 \end{aligned}$$

  Passo 2 — Função de log-verosimilhança
  $\ln L(\beta|\underline{x}) = -n\ln(2) - 3n\ln(\beta) - \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \ln(x_i^2)$

  Passo 3 — Maximização
  A estimativa de MV de β é aqui representada por $\hat{\beta}$ e
  $$\hat{\beta} \ :\ \begin{cases} \left.\frac{d\ln L(\beta|\underline{x})}{d\beta}\right|_{\beta=\hat{\beta}} = 0 & \text{(ponto de estacionaridade)} \\ \left.\frac{d^2\ln L(\beta|\underline{x})}{d\beta^2}\right|_{\beta=\hat{\beta}} < 0 & \text{(ponto de máximo)} \end{cases}$$
  $$\begin{cases} -\frac{3n}{\hat{\beta}} + \frac{1}{\hat{\beta}^2}\sum_{i=1}^n x_i = 0 \\ \frac{3n}{\hat{\beta}^2} - \frac{2}{\hat{\beta}^3}\sum_{i=1}^n x_i < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\beta} = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\bar{x}}{3} \\ -\frac{27n}{\bar{x}^2} < 0, \text{ proposição verdadeira pois } \bar{x} > 0 \end{cases}$$

Passo 4 — Estimador de MV de β
Será representado pela v.a. $\text{EMV}(\beta) = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{\bar{X}}{3}$.

(b) *Supondo que a amostra conduziu a uma estimativa de máxima verosimilhança do parâmetro β igual a 0.54 (em $10^3\,h$), determine a correspondente estimativa de máxima verosimilhança do valor esperado do tempo de funcionamento por componente.* (0.5)

- **Outro parâmetro** DESCONHECIDO

$$\begin{aligned} h(\beta) &= E(X) \\ &= 3\beta \end{aligned}$$

- **Estimativa de MV de $h(\beta)$**
Invocando a propriedade de invariância dos estimadores de máxima verosimilhança, pode concluir-se que a estimativa de MV de $h(\beta) = E(X) = 3\beta$ é

$$\begin{aligned} \widehat{h(\beta)} &= h(\hat{\beta}) \\ &= 3\hat{\beta} \\ &= 3 \times 0.54 \\ &= 1.62. \end{aligned}$$

(c) *Determine o erro quadrático médio do estimador $T = \frac{\bar{X}+1}{3}$ do parâmetro β.* (1.5)

- **Outro estimador de β**
$T = \frac{\bar{X}+1}{3} = \frac{\bar{X}}{3} + \frac{1}{3}$

- **Erro quadrático médio**
É sabido que $E(\bar{X}) = E(X)$ e $V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n}$, quando $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X$, $i = 1, \ldots, n$. Se para além disso atendermos ao facto de $E(X) = 3\beta$ e $V(X) = 3\beta^2$, obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned} E(T) &= E\left(\frac{\bar{X}}{3} + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{E(X)}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \beta + \frac{1}{3} \\ V(T) &= V\left(\frac{\bar{X}}{3} + \frac{1}{3}\right) \\ &= V\left(\frac{\bar{X}}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3^2} \times \frac{V(X)}{n} \\ &= \frac{1}{3^2} \times \frac{3\beta^2}{n} \\ &= \frac{\beta^2}{3n} \\ EQM_\beta(T) &= E\left[(T-\beta)^2\right] \\ &= V(T) + [E(T) - \beta]^2 \\ &= \frac{\beta^2}{3n} + \frac{1}{3^2}. \end{aligned}$$

2. *A administração de uma empresa produtora de cabos de aço decidiu estudar a tensão de ruptura (em kgf), X, de cabos produzidos por um novo processo de fabrico a partir da análise de 10 desses cabos, escolhidos ao acaso. Os 10 cabos analisados conduziram a $\sum_{i=1}^{10} x_i = 1020$ e $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 104\,082$; assume-se que a tensão de ruptura de cabos produzidos pelo novo processo de fabrico possui distribuição normal.*

(a) *É razoável admitir que o novo processo produz cabos com tensão média de ruptura diferente do valor actualmente especificado de 100 kgf, ao nível de significância de 5%?* (3.0)

- **V.a. de interesse**
  $X =$ tensão de ruptura de um cabo

- **Situação**
  $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$
  μ DESCONHECIDO
  σ^2 desconhecido

- **Hipóteses**
  $H_0 : \mu = \mu_0 = 100$
  $H_1 : \mu \neq \mu_0 = 100$

- **Nível de significância**
  $\alpha_0 = 0.05$

- **Estatística de teste**
  $$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim_{H_0} t_{(n-1)}$$
  pois pretendemos efectuar um teste sobre o valor esperado de uma população normal com variância desconhecida.

- **Região de rejeição de** H_0 (para valores da estatística de teste)
  Tratando-se de um teste bilateral ($H_1 : \mu \neq \mu_0$), a região de rejeição de H_0 é uma reunião de intervalos simétricos do tipo $W = (-\infty, -c) \cup (c, +\infty)$, onde $c : P(\text{Rejeitar } H_0 | \mu = \mu_0) = \alpha_0$, i.e.,
  $$\begin{aligned} c &= F^{-1}_{t_{(n-1)}}(1 - \alpha_0/2) \\ &= F^{-1}_{t_{(10-1)}}(1 - 0.05/2) \\ &= F^{-1}_{t_{(9)}}(0.975) \\ &\stackrel{tabela}{=} 2.262. \end{aligned}$$

- **Decisão**
  Uma vez que
  $n = 10$
  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1020}{10} = 102$
  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (xi - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{10-1}(104\,082 - 10 \times 102^2) = \frac{42}{9} = \frac{14}{3}$,
  o valor observado da estatística é igual a
  $$\begin{aligned} t &= \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{102 - 100}{\frac{\sqrt{\frac{14}{3}}}{\sqrt{10}}} \\ &\simeq 2.928. \end{aligned}$$
  Como $t \simeq 2.928 \in W = (-\infty, -2.262) \cup (2.262, +\infty)$, devemos rejeitar H_0 a qualquer n.s. maior ou igual a 5%.

(b) *Deduza um intervalo, com nível de confiança de* 90%*, para a variância da tensão de ruptura dos cabos produzidos pelo novo processo.* (2.5)

- **Situação**
  $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$
  μ desconhecido
  σ^2 DESCONHECIDO

- **Obtenção de IC para** σ^2
  - **Passo 1 — Selecção da v.a. fulcral para** σ^2
    $$T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

– **Passo 2 — Obtenção dos quantis de probabilidade**
Dado que $(1-\alpha)\times 100\% = 90\% \Leftrightarrow \alpha = 0.10$, os quantis a utilizar são

$$(a_\alpha, b_\alpha) \quad : \quad \begin{cases} P(Z < a_\alpha) = \alpha/2 \\ P(Z > b_\alpha) = \alpha/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_\alpha = F^{-1}_{\chi^2_{(n-1)}}(\alpha/2) = F^{-1}_{\chi^2_{(9)}}(0.05) \stackrel{tabela}{=} 3.325 \\ b_\alpha = F^{-1}_{\chi^2_{(n-1)}}(1-\alpha/2) = F^{-1}_{\chi^2_{(9)}}(0.95) \stackrel{tabela}{=} 16.92. \end{cases}$$

Estes enquadram a v.a. fulcral para σ^2 com probabilidade igual a $(1-\alpha)$.

– **Passo 3 — Inversão da desigualdade** $a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha$

$$P(a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha) = 1-\alpha$$

$$P\left[a_\alpha \leq \tfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq b_\alpha\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\tfrac{a_\alpha}{(n-1)S^2} \leq \tfrac{1}{\sigma^2} \leq \tfrac{b_\alpha}{(n-1)S^2}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\frac{(n-1)S^2}{F^{-1}_{\chi^2_{(n-1)}}(1-\alpha/2)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{F^{-1}_{\chi^2_{(n-1)}}(\alpha/2)}\right] = 1-\alpha.$$

– **Passo 4 — Concretização**
Do passo 3 conclui-se que

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}\left[\frac{(n-1)s^2}{F^{-1}_{\chi^2_{(n-1)}}(1-\alpha/2)}, \frac{(n-1)s^2}{F^{-1}_{\chi^2_{(n-1)}}(\alpha/2)}\right].$$

Ora, tendo em conta que $n = 10$ e $s^2 \stackrel{(a)}{=} \frac{14}{3}$, bem como os quantis do passo 2, obtém-se o IC a 90% para σ^2:

$$\begin{aligned} IC_{90\%}\left(\sigma^2\right) &= \left[\frac{(10-1)\times\frac{14}{3}}{16.92}, \frac{(10-1)\times\frac{14}{3}}{3.325}\right] \\ &= [2.482,\ 12.632]. \end{aligned}$$

Grupo II	10 valores

1. *A averiguação de uma amostra casual de* 1 000 *apólices recentes de uma empresa seguradora, em termos do número* X *de sinistros por apólice no último ano, mostrou que: 805 apólices não tinham sinistros associados; 172 apólices tinham um único sinistro associado; e as restantes 23 apólices tinham associados pelo menos 2 sinistros.* (4.0)

Pretende saber-se se a distribuição Binomial$(10, 0.02)$ *pode ser um bom modelo para a distribuição de* X *à luz dos dados indicados. Diga que conclusão deve tirar sobre o modelo conjecturado, tendo por base o cálculo do valor-p de um teste adequado.*

- **V.a. de interesse**
  X = número de sinistros por apólice no último ano
- **Hipóteses**
  $H_0 : X \sim$ Binomial$(10, 0.02)$
  $H_1 : X \not\sim$ Binomial$(10, 0.02)$
- **Estatística de Teste**

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \ \stackrel{a}{\sim}_{H_0}\ \chi^2_{(k-\beta-1)},$$

onde:

$k =$ No. de classes $= 3$;

$O_i =$ Frequência absoluta observável da classe i;

$E_i =$ Frequência absoluta esperada, sob H_0, da classe i;

$\beta =$ No. de parâmetros a estimar $= 0$.

- **Região de rejeição de** H_0 (para valores de T)

  Tratando-se de um teste de ajustamento, a região de rejeição de H_0 escrita para valores de T é um intervalo à direita $W = (c, +\infty)$.

  Frequências absolutas esperadas sob H_0

  Para já, note-se que o conjunto de valores possíveis da distribuição Binomial$(10, 0.02)$ é $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$. Assim, as classes a considerar são $\{0\}$, $\{1\}$ e $\{2, \ldots, 10\}$ e as frequências absolutas esperadas sob H_0 são iguais a

$$\begin{aligned}
E_1 &= n \times p_1^0 \\
&= n \times P\left[X = 0 \mid X \sim \text{Binomial}(10, 0.02)\right] \\
&= 1000 \times \binom{10}{0} 0.02^0 (1-0.02)^{10-0} \\
&= 1000 \times 0.98^{10} \\
&= 1000 \times F_{Bin(10,0.02)}(0) \\
&\stackrel{tabela}{=} 1000 \times 0.8171 \\
&= 817.1 \\
E_2 &= n \times p_2^0 \\
&= n \times P\left[X = 1 \mid X \sim \text{Binomial}(10, 0.02)\right] \\
&= 1000 \times \binom{10}{1} 0.02^1 (1-0.02)^{10-1} \\
&= 1000 \times 10 \times 0.02 \times 0.98^9 \\
&= 1000 \times \left[F_{Bin(10,0.02)}(1) - F_{Bin(10,0.02)}(0)\right] \\
&\stackrel{tabela}{=} 1000 \times (0.9838 - 0.8171) \\
&= 1000 \times 0.1667 \\
&= 166.7 \\
E_3 &= n \times p_3^0 \\
&= n \times P\left[X \geq 2 \mid X \sim \text{Binomial}(10, 0.02)\right] \\
&= n \times P\left[X = 2, \ldots, 10 \mid X \sim \text{Binomial}(10, 0.02)\right] \\
&= n \times (1 - p_1^0 - p_2^0) \\
&= n \times (1 - 0.8171 - 0.1667) \\
&= 1000 \times 0.0162 \\
&= 16.2
\end{aligned}$$

  Não é necessário qualquer agrupamento de classes uma vez que em pelo menos 80% das classes se verifica $E_i \geq 5$ e em todas elas tem-se $E_i \geq 1$.

- **Decisão**

  No cálculo do valor observado da estatística de teste convém recorrer à seguinte tabela auxiliar.

i	Classe i	Freq. abs. obs. o_i	Freq. abs. esper. sob H_0 $E_i = n \times p_i^0$	Parcelas valor obs. estat. teste $\frac{(o_i-E_i)^2}{E_i}$
1	$\{0\}$	805	817.1	$\frac{(805-817.1)^2}{817.1} = 0.1792$
2	$\{1\}$	172	166.7	0.1685
3	$\{2,\dots,10\}$	23	16.2	2.8543
		$\sum_{i=1}^k o_i = n = 1000$	$\sum_{i=1}^k E_i = n = 1000$	$t = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i-E_i)^2}{E_i} = 3.2020$

- **Decisão (com base em intervalo para o valor-p)**

  Uma vez que este teste está associado a uma região de rejeição que é um intervalo à direita temos:

$$\begin{aligned} valor-p &= P(T > t \mid H_0) \\ &= P(T > 3.2020 \mid H_0) \\ &\simeq 1 - F_{\chi^2_{(3-0-1)}}(3.2020). \end{aligned}$$

  Recorrendo às tabelas de quantis da distribuição do qui-quadrado podemos adiantar um intervalo para o *valor-p* deste teste. Com efeito, ao enquadrarmos convenientemente $t = 3.2020$, obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned} F^{-1}_{\chi^2_{(2)}}(0.70) = 2.408 &< 3.2020 < 3.219 = F^{-1}_{\chi^2_{(2)}}(0.80) \\ 0.70 &< F_{\chi^2_{(2)}}(3.2020) < 0.80 \\ 0.20 = 1 - 0.80 &< valor-p < 1 - 0.70 = 0.30. \end{aligned}$$

  Logo:

  – não devemos rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 \leq 20\%$, por exemplo a qualquer dos níveis usuais de significância de 1%, 5% e 10%;

  – devemos rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 \geq 30\%$.

- **Alternativa — Decisão (com base no valor-p determinado usando máquina de calcular)**

  Dado que este teste está associado a uma região de rejeição que é um intervalo à direita temos:

$$\begin{aligned} p-value &= P(T > t \mid H_0) \\ &= P(T > 3.2020 \mid H_0) \\ &\simeq 1 - F_{\chi^2_{(3-0-1)}}(3.2020) \\ &= 0.2017. \end{aligned}$$

  Consequentemente:

  – não devemos rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 \leq 20.17\%$, por exemplo a qualquer dos níveis usuais de significância de 1%, 5% e 10%;

  – devemos rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 > 20.17\%$.

2. *Num estudo investigando a relação entre exposição ao ruído e hipertensão, obtiveram-se dados sobre o aumento Y da pressão arterial (em mm Hg) e a intensidade de som x (em db) a que indivíduos são sujeitos, que se encontram parcialmente sumariados em:*

$$n = 20, \quad \sum_{i=1}^{20} x_i = 1\,656, \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 140\,176, \quad \sum_{i=1}^{20} y_i = 86, \quad \sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 494.$$

Ajustando-se o modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$, $i = 1,\dots,n$, com erros aleatórios não correlacionados entre si com valor esperado nulo e variância constante, obteve-se a estimativa dos mínimos quadrados de β_0, $\hat\beta_0 = -10.13$.

(a) *Determine uma estimativa do valor esperado do aumento da pressão arterial face à exposição a ruído com intensidade de 85 db. Calcule e interprete o valor do coeficiente de determinação.* (3.0)

- **[Modelo de RLS**
  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$
  $Y_i =$ aumento da pressão arterial no $i-$ésimo indivíduo
  $x_i =$ intensidade de som a que é sujeito o $i-$ésimo indivíduo
  $\epsilon_i \quad = \quad$ erro aleatório associado à medição do aumento da pressão arterial do $i \quad -$ ésimo indivíduo]

- **Estimativa de** β_1
  [Uma vez que $n = 20$ e
  $\sum_{i=1}^n x_i = 1\,656,$
  $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \frac{1\,656}{20} = 82.8$
  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 140\,176$
  $\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,(\bar{x})^2 = 140\,176 - 20 \times 82.8^2 = 3\,059.2$

  $\sum_{i=1}^n y_i = 86,$
  $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i = \frac{86}{20} = 4.3$
  $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 494$
  $\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\,(\bar{y})^2 = 494 - 20 \times 4.3^2 = 124.2$

  $\hat{\beta}_0 = -10.1072$]
  a estimativa dos mínimos quadrados de β_1 é, para este modelo, tal que:
  $$\begin{aligned}\hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \times \bar{x} \\ \hat{\beta}_1 &= \frac{\bar{y} - \hat{\beta}_0}{\bar{x}} \\ &= \frac{4.3 - (-10.1072)}{82.8} \\ &= 0.174\end{aligned}$$

- **Estimativa de** $E(Y|x = 85)$
  É sabido que $\hat{E}(Y|x = x_0) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \times x_0$, pelo que:
  $$\hat{E}(Y|x = 85) \quad = \quad -10.1072 + 0.174 \times 85 = 4.6828.$$
  [Esta estimativa deve usada com cautela, caso $85 \not\in [\min_{i=1,\ldots,n} x_i,\ \max_{i=1,\ldots,n} x_i]$.]

- **Obtenção e interpretação do coeficiente de determinação**
  Tirando partido do facto de $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\,\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar{x}^2}$, assim como dos valores obtidos anteriormente, segue-se
  $$\begin{aligned}r^2 &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\,\bar{x}\,\bar{y}\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar{x}^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\,\bar{y}^2\right)} \\ &= \frac{\left[\hat{\beta}_1 \times \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar{x}^2\right)\right]^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar{x}^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\,\bar{y}^2\right)} \\ &= \frac{\hat{\beta}_1^2 \times \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar{x}^2\right)}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\,\bar{y}^2}\end{aligned}$$
  $$\begin{aligned}&= \frac{0.174^2 \times 3\,059.2}{124.2} \\ &\simeq 0.745735,\end{aligned}$$
  i.e., cerca de 74.57% da variação total da variável resposta Y é explicada pelo modelo de regressão, o que indicia um bom ajustamento da recta estimada ao nosso conjunto de dados.

(b) *Admitindo que os erros aleatórios são independentes e possuem distribuição normal, averigue se é possível concluir que a exposição ao ruído provoca um aumento no valor esperado de Y, ao nível de significância de 5%.* (3.0)

- **[Hipóteses de trabalho**
  $\epsilon_i \sim_{i.i.d.}$ Normal$(0, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$ (hipótese de trabalho)
  $\beta_0, \beta_1, \sigma^2$ DESCONHECIDOS]

- **Hipóteses**
  $H_0 : \beta_1 = \beta_{1,0} = 0 \quad (\text{ou } \beta_1 = 0)$
  $H_1 : \beta_1 \neq \beta_{1,0} > 0 \quad (\text{ou } \beta_1 > 0)$

- **Nível de significância**
  $\alpha_0 = 5\%$

- **Estatística de teste**

$$T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar{x}^2}}} \sim_{H_0} t_{(n-2)}$$

- **Região de rejeição de H_0** (para valores da estatística de teste)
  Estamos a lidar com um teste unilateral superior ($H_1 : \beta_1 \neq \beta_{1,0}$), pelo que a região de rejeição de H_0 é $W = (c, +\infty)$, onde

$$\begin{aligned} c \quad : \quad & P(\text{Rejeitar } H_0|H_0) = \alpha_0 \\ & c = F^{-1}_{t_{(n-2)}}(1-\alpha_0) \\ & c = F^{-1}_{t_{(18)}}(0.95) \\ & c \overset{tabela}{=} 1.734. \end{aligned}$$

- **Decisão**
  Tendo em conta que a estimativa σ^2 é igual a

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-2}\left[\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\,\bar{y}^2\right) - (\hat{\beta}_1)^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar{x}^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{20-2}\left(124.2 - 0.174^2 \times 3059.2\right) \\ &\simeq 1.7544, \end{aligned}$$

  e atendendo a alguns dos resultados anteriores, o valor observado da estatística de teste é dado por

$$\begin{aligned} t &= \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\,\bar{x}^2}}} \\ &= \frac{0.174 - 0}{\sqrt{\frac{1.7544}{3059.2}}} \\ &= 7.2659. \end{aligned}$$

  Como $t = 7.2659 \in W = (1.734, +\infty)$, devemos rejeitar $H_0 : \beta_1 = \beta_{1,0} = 0$ a favor de $H_1 : \beta_1 > \beta_{1,0}$ a qualquer n.s. superior ou igual a $\alpha_0 = 5\%$.