

Duração: 90 minutos

1º teste B

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I

10 valores

1. Uma empresa financeira desenvolveu um modelo de forma a prever, sob determinadas condições macroeconómicas, a ocorrência de recessões económicas. O modelo faz previsões correctas quando ocorre recessão em 80% dos casos, mas faz previsões incorrectas quando não ocorre recessão em 10% dos casos. Dados históricos mostram que a probabilidade de ocorrência de recessão económica, nas condições de uso do modelo, é de 0.2. Supondo verificadas as condições de uso do modelo, calcule:

- (a) A probabilidade de ocorrer recessão económica, sabendo que o modelo prevê a ocorrência desta. (3.0)

Sejam R = “ocorre uma recessão” e PR = “previsão de recessão”. Tem-se $P(R) = 0.2$, $P(PR|R) = 0.8$ e $P(PR|\bar{R}) = 0.1$.

$$P(R|PR) = \frac{P(PR|R)P(R)}{P(PR|R)P(R) + P(PR|\bar{R})P(\bar{R})} = \frac{0.8 \times 0.2}{0.8 \times 0.2 + 0.1 \times (1 - 0.2)} = \frac{2}{3}.$$

- (b) A probabilidade de ocorrer recessão económica ou o modelo prever a ocorrência de recessão económica. (1.5)

$$P(R \cup PR) = P(R) + P(PR) - P(R \cap PR) = P(R) + P(PR \cap \bar{R}) = P(R) + P(PR|\bar{R})P(\bar{R}) = 0.2 + 0.1 \times 0.8 = 0.28.$$

2. Um serviço de atendimento permanente recebe chamadas telefónicas segundo um processo de Poisson com valor esperado de 3 chamadas por minuto.

- (a) Sabendo que num período de 10 minutos foram recebidas chamadas, qual é a probabilidade de nesse período o serviço receber no máximo 25 chamadas? (2.5)

Seja X_t = “número de chamadas recebidas em t minutos” tem-se $X_t \sim Poi(\lambda t)$, onde $\lambda = E[X_1] = 3$.

$$P(X_{10} \leq 25 | X_{10} > 0) = \frac{P(0 < X_{10} \leq 25)}{P(X_{10} > 0)} = \frac{F_{Poi(30)}(25) - F_{Poi(30)}(0)}{1 - F_{Poi(30)}(0)} = \frac{0.2084 - 0}{1 - 0} = 0.2084.$$

- (b) Considere períodos consecutivos de 10 minutos e que cada período é considerado atípico se o serviço receber mais de 40 chamadas no período. Determine o valor esperado e o desvio padrão do número de períodos de 10 minutos a observar até que se encontre um período atípico. (3.0)

Seja Y = “número de períodos de 10 minutos a observar até que se encontre um período atípico”. Uma vez que os períodos são disjuntos, Y representa o número de realizações independentes de uma prova de Bernoulli, ou seja, $Y \sim Geo(p)$, com $p = P(X_{10} > 40) = 1 - F_{Poi(30)}(40) = 0.0323$.

$$E[Y] = \frac{1}{p} = 30.9598$$

$$\sqrt{Var[Y]} = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} = 30.456.$$

Grupo II

10 valores

1. Um avião de médio curso pode transportar até 100 passageiros e respectivas bagagens. Para cumprir as regras de segurança, o peso total atribuído aos passageiros e suas bagagens não deve ultrapassar 9.3 toneladas.

- (a) Assumindo que: (3.0)

– o valor esperado do peso de um passageiro é 70 Kg com desvio padrão de 10 Kg;

– o valor esperado do peso da bagagem de um passageiro é 20 Kg com desvio padrão de 5 Kg; e que todos os pesos em causa são independentes entre si, determine aproximadamente a probabilidade de o aparelho com a lotação completa (100 passageiros) não poder levantar voo devido a excesso de peso.

Sejam X_i = “peso do passageiro i ” e Y_i = “peso da bagagem do passageiro i ”, $i = 1, \dots, 100$, e $T = \sum_{i=1}^{100} (X_i + Y_i)$ = “peso total dos 100 passageiros e respectiva bagagem”. Como T é a soma de um número suficientemente grande de variáveis aleatórias independentes então, pelo teorema do limite central tem-se

$$Z = \frac{T - E[T]}{\sqrt{\text{Var}[T]}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1).$$

$$E[T] = E[\sum_{i=1}^{100} (X_i + Y_i)] = \sum_{i=1}^{100} (E[X_i] + E[Y_i]) = 100(E[X] + E[Y]) = 9000 \text{ e}$$

$$\text{Var}[T] = \text{Var}[\sum_{i=1}^{100} (X_i + Y_i)] = \sum_{i=1}^{100} (\text{Var}[X_i] + \text{Var}[Y_i]) = 100(\text{Var}[X] + \text{Var}[Y]) = 12500$$

$$P(T > 9300) = 1 - P\left(Z \leq \frac{9300 - 9000}{\sqrt{12500}}\right) \approx 1 - \Phi(2.68) = 0.0037.$$

- (b) Determine de modo exacto a probabilidade pedida na alínea (a) considerando que os pesos, quer de cada passageiro, quer da sua bagagem, têm distribuição normal. (1.0)

A probabilidade calculada em (a) é agora o resultado exacto pois a soma de variáveis aleatórias normais e independentes tem ainda uma distribuição normal.

2. Considere o par aleatório (X_1, X_2) cuja função de probabilidade conjunta está representada sumariamente na seguinte tabela:

$X_1 \backslash X_2$	0	1	2
0	1/16	5/16	1/8
1	3/16	3/16	1/8

- (a) Verifique que $X_i \sim \text{Binomial}(i, 1/2)$, para $i = 1, 2$. (1.5)

$$P(X_1 = x) = \sum_{y=0}^2 P(X_1 = x, X_2 = y) = \begin{cases} 1/2, & x = 0 \text{ ou } x = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \iff X_1 \sim \text{Ber}(1/2) \equiv \text{Binomial}(1, 1/2)$$

$$P(X_2 = y) = \sum_{x=0}^1 P(X_1 = x, X_2 = y) = \begin{cases} 1/4, & y = 0 \text{ ou } y = 2 \\ 1/2, & y = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} \binom{2}{y} \frac{1}{4}, & y = 0, 1, 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \iff$$

$$\iff X_2 \sim \text{Binomial}(2, 1/2)$$

- (b) Determine o valor esperado de X_2 condicionalmente a $X_1 = 1$. Com base nesse valor, o que pode concluir quanto à independência entre X_1 e X_2 ? (2.0)

$$P(X_2 = y | X_1 = 1) = \frac{P(X_1 = 1, X_2 = y)}{P(X_1 = 1)} = \begin{cases} 3/8, & y = 0 \text{ ou } y = 1 \\ 1/4, & y = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E[X_2 | X_1 = 1] = \sum_{y=0}^2 y P(X_2 = y | X_1 = 1) = 7/8 \neq 1 = E[X_2] \implies X_1 \text{ e } X_2 \text{ não são variáveis aleatórias independentes.}$$

- (c) Calcule o coeficiente de correlação de (X_1, X_2) e comente o valor obtido. (2.5)

Tendo em conta (a) tem-se $E[X_1] = 1/2$, $\text{Var}[X_1] = 1/4$, $E[X_2] = 1$ e $\text{Var}[X_2] = 1/2$.

$$E[X_1 X_2] = \sum_{x=0}^1 \sum_{y=0}^2 xy P(X_1 = x, X_2 = y) = 3/16 + 1/4 = 7/16$$

$$\text{Corr}[X_1, X_2] = \frac{E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2]}{\sqrt{\text{Var}[X_1]\text{Var}[X_2]}} = -0.1768.$$

$\text{Corr}[X_1, X_2] \neq 0$ confirma que as variáveis são dependentes. Como $\text{Corr}[X_1, X_2] < 0$ conclui-se que as variáveis estão negativamente associadas. No entanto, essa associação é fraca uma vez que o valor de $|\text{Corr}[X_1, X_2]|$ é pequeno.