Probabilidades e Estatística

TODOS OS CURSOS

2º semestre – 2013/2014
02/07/2014 – 13:00

Duração: 90 minutos **2º teste C**

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I	10 valores

1. Admite-se que o tempo de vida de um microrganismo é uma variável aleatória X, em minutos, que segue uma distribuição normal com valor esperado μ e desvio padrão 2 minutos. A fim de estimar o parâmetro μ, foram seleccionados ao acaso 10 microrganismos cujos tempos de vida conduziram a $\sum_{i=1}^{10} x_i = 846$.

(a) Usando o método de máxima verosimilhança, determine as estimativas do parâmetro μ e da probabilidade de o tempo de vida dum microrganismo ser inferior a 83 minutos. (3.5)

Solução: Estimativas de μ e $P(X < 83)$ são, respectivamente, $\bar{x} = 84.6$ e 0.2119.

(b) Sendo $\bar{X}$ a média de uma amostra aleatória de dimensão 10 da população X e c uma constante real, determine o erro quadrático médio associado ao estimador $T_c = \bar{X} + c$ do parâmetro μ e obtenha o valor da constante c que minimiza o erro quadrático médio. (1.5)

Solução: $EQM(T_c) = 0.4 + c^2$ e $c = 0$.

2. Numa sondagem a 300 habitantes de uma zona da Grande Lisboa que utilizam o automóvel para ir de casa para o emprego, 100 declararam-se disponíveis para passar a utilizar o metropolitano, caso este venha a chegar à sua zona de residência. Com base nos resultados desta amostragem aleatória:

(a) Construa um intervalo de confiança a aproximadamente 96% para a verdadeira proporção (p) de habitantes com tal condição de disponibilidade. (3.5)

Solução: $[0.2774, 0.3892]$.

(b) Quantos habitantes adicionais devemos sondar para estarmos confiantes a 99% que a margem de erro de estimação de p através de $\bar{X}$ seja menor que 2%? (1.5)

Solução: 3387 usando $p = \bar{x}$.

Grupo II	10 valores

1. Os resultados obtidos em 80 lançamentos, efectuados ao acaso, de um dado com oito faces, encontram-se na tabela seguinte:

Face	1	2	3	4	5	6	7	8
Frequência absoluta	7	10	11	9	12	10	14	7

(a) Teste a hipótese de o dado ser equilibrado, fazendo uso de uma região crítica com nível de significância de 1%. (3.5)

Solução: Valor observado da estatística do teste $t_0 = 4 \notin (18.475, \infty)$, região crítica. Não se rejeita $H_0 : X \sim \text{Uniforme}\{1, 2, \ldots, 8\}$ ao n.s. de 1%.

(b) Calcule, justificando, o valor-p do teste anterior e decida com base no valor obtido. (1.0)

Solução: valor-p = 0.7798. Não se rejeita H_0 aos n.s. habituais.

2. Um professor escolheu aleatoriamente 8 alunos de uma turma de uma disciplina para estudar a relação entre o número de horas de estudo dessa disciplina nas duas últimas semanas antes do teste (x) e a nota obtida no teste (Y), na escala de $[0, 20]$ valores. Os dados obtidos encontram-se parcialmente apresentados abaixo, bem como uma síntese dos mesmos.

x	20	15	11	20	8	16	14	22
y	16	15	12	··	10	14	··	18

$$\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 2146,\ \sum_{i=1}^{8} y_i^2 = 1585,\ \sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 1825,\ \sum_{i=1}^{8} x_i = 126,\ \sum_{i=1}^{8} y_i = 111$$

Admitindo a validade do modelo de regressão linear simples, $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$, $i = 1, \ldots, 8$, com as hipóteses de trabalho usuais:

(a) Estime a recta de regressão e obtenha, caso o modelo lhe permita fazê-lo, estimativas das notas esperadas no teste de alunos com 14 e 25 horas de estudo nas duas últimas semanas antes do teste, justificando porquê o modelo lhe permite ou não obter as referidas estimativas. (2.0)

Solução: $\widehat{E}(Y|x) = 6.39 + 0.4752\,x$. $\widehat{E}(Y|x = 14) = 13.04$. $\widehat{E}(Y|x = 25)$ não deve ser estimado usando a recta de regressão ajustada pois $x = 25$ não pertence aos valores observados de $x_i \in [8, 22]$.

(b) Teste ao nível de significância de 1% se o valor esperado da nota do teste de um aluno com 20 horas de estudo é de 14 valores. (3.5)

Solução: Valor observado da estatística do teste $t_0 = 3.29 \notin (-\infty, 3.707) \cup (3.707, \infty)$, região crítica. Não se rejeita $H_0 : E(Y|x = 20) = 14$ ao n.s. de 1%.