DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Probabilidades e Estatística

LEGM, LEIC-A, LEIC-T, LMAC, LEMat, MEAmbi, MEBiol, MEFT, MEQ

2º semestre – 2013/2014
26/04/2014 – 09:00

Duração: 90 minutos **1º teste A**

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I 10 valores

1. Considere dois acontecimentos B e C, com probabilidades não nulas, associados à mesma experiência aleatória, tais que: (2.0)

$$P(C) = 0.3,\ P(B|C) = 0.4,\ P(\overline{B}|\overline{C}) = 0.8$$

Calcule $P(C|B)$.

$P(C|B) = \frac{P(B\cap C)}{P(B)} = \frac{P(B|C)P(C)}{P(B|C)P(C)+P(B|\overline{C})P(\overline{C})} = \frac{P(B|C)P(C)}{P(B|C)P(C)+(1-P(\overline{B}|\overline{C}))(1-P(C))} = \frac{0.4\times0.3}{0.4\times0.3+(1-0.8)\times(1-0.3)} = \frac{12}{26} \approx 0.4615.$

2. Suponha que, quando se tenta fazer uma certo tipo de pagamento usando o Paypal, a probabilidade de não ser bem sucedido é de 0.2.

(a) Calcule a probabilidade de terem de ser feitas pelo menos 3 tentativas, independentes, até se conseguir efectuar um pagamento. (2.5)

P(ser mal sucedido no pagamento) $= 0.2$.
$X =$ nº tentativas até conseguir efectuar um pagamento usando Paypal.
$X \sim Geom(p)$, $p = P$(pagamento bem sucedido) $= 1-0.2 = 0.8$, porque i) provas de Bernoulli (um pagamento ser ou não bem sucedido) independentes, ii) $p = P$(pagamento bem sucedido) $= 0.8 =$ constante, iii) X conta nº tentativas até 1º sucesso.
$P(X\geq 3) = 1-P(X\leq 2) = 1-\sum_{k=1}^{2}(1-p)^{k-1}p = 1-0.8-0.8\times0.2 = 0.04.$

(b) Determine o número esperado e o número mediano de tentativas independentes que se têm de fazer até se conseguir efectuar um pagamento. (2.5)

$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.8} = 1.25$, porque $X \sim Geom(0.8)$.
Mediana de $X : \xi$ tal que $P(X\geq\xi)\geq 0.5 \wedge P(X\leq\xi)\geq 0.5$,
onde $P(X\leq\xi) = \sum_{k=1}^{\xi}0.2^{k-1}0.8 = 0.8\sum_{k=0}^{\xi-1}0.2^k = 0.8\,\frac{1-0.2^\xi}{1-0.2} = 1-0.2^\xi$, $\xi\in\{1,2,3,\ldots\}$.
Logo, $\xi = 1$, $P(X\leq 1) = 0.8\geq 0.5 \wedge P(X\geq 1) = 1\geq 0.5$. Assim, 1 é a mediana de X.
Nota: 2 não é a mediana de X porque $P(X\geq 2) = 1-P(X=1) = 0.2 < 0.5$.

(c) Para um conjunto de 100 pagamentos, considerados independentes, calcule aproximadamente a probabilidade de serem efectuadas mais de 120 tentativas, no total, para efectuar os pagamentos. (3.0)

$n = 100$ pagamentos independentes. $Y =$ nº tentativas necessárias para efectuar 100 pagamentos.
$X_i =$ nº tentativas para fazer pagamento i. $Y = \sum_{i=1}^{100}X_i$, onde $X_i \sim Geom(p=0.8)$, $p = 0.8$.
$E(X_i) = 1.25$, $Var(X_i) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{0.2}{0.8^2} = 0.3125$
$E(Y) = E(\sum_{i=1}^{100}X_i) = \sum_{i=1}^{100}E(X_i) \overset{i.d.}{=} 100E(X_1) = 125$
$Var(Y) = Var(\sum_{i=1}^{100}X_i) \overset{ind.}{=} \sum_{i=1}^{100}Var(X_i) \overset{i.d.}{=} 100Var(X_1) = 31.25$
Logo, pelo T.L.C. e como $n = 100 \gg 30$, $\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-125}{\sqrt{31.25}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$.
Assim sendo, $P(Y>120) = 1-P(Y\leq 120) = 1-P(\frac{Y-125}{\sqrt{31.25}}\leq\frac{120-125}{\sqrt{31.25}}) \approx 1-\Phi(-0.89) = \Phi(0.89) \approx 0.8133.$

Grupo II 10 valores

1. O diâmetro de uma variedade de tomates de mesa é uma variável aleatória, X, com distribuição normal de valor médio 70 mm e desvio padrão de 4 mm. Conforme o diâmetro, um equipamento mecânico classifica os tomates em três categorias: $C_1 = \{X \leq 65\}$, $C_2 = \{65 < X \leq 75\}$ e $C_3 = \{X > 75\}$.

(a) Determine a proporção de tomates que são classificados na categoria C_3. (1.0)

X = diâmetro de tomates (mm), $X \sim N(70, 4)$.
$P(C_3) = P(X > 75) = 1 - P(X \leq 75) = 1 - P(\frac{X-70}{4} \leq \frac{75-70}{4}) = 1 - \Phi(1.25) \approx 1 - 0.8944 = 0.1056$.

(b) Obtenha o 3º quartil de X, ou seja, o valor do diâmetro que não é excedido por 75% dos tomates. (1.5)

Seja $q_3 : P(X \leq q_3) = 0.75$
$\Leftrightarrow\ P(\frac{X-70}{4} \leq \frac{q_3-70}{4}) = \Phi(\frac{q_3-70}{4}) = 0.75 \Leftrightarrow\ \frac{q_3-70}{4} = \Phi^{-1}(0.75) \Leftrightarrow\ q_3 = 70 + 4 \times 0.6745 \Leftrightarrow\ q_3 = 72.698$.

(c) Tendo em conta os custos de armazenamento e distribuição, admite-se que o lucro por tomate é de 1, 3 e 5 cêntimos, respetivamente para as categorias C_1, C_2 e C_3. Qual é o valor esperado e o desvio padrão do lucro por tomate? (3.0)

$L = 1(C_1), L = 3(C_2), L = 5(C_3)$, onde L representa o lucro por tomate.
$P(C_1) = P(X \leq 65) = \Phi(\frac{65-70}{4}) = \Phi(-1.25) = 0.1056$.
$P(C_2) = P(65 < X \leq 75) = 1 - P(C_1) - P(C_3) = 1 - 2 \times (0.1056) = 0.788$.
$E(L) = \sum_x xP(L = x) = 1P(C_1) + 3P(C_2) + 5P(C_3) = 1 \times 0.1056 + 3 \times 0.7888 + 5 \times 0.1056 = 3$ ou
como L é uma variável aleatória simétrica em relação a 3, $E(L) = 3$.
$Var(L) = E(L^2) - E(L)^2 = \sum_x x^2 P(L = x) - 3^2 = 1^2P(C_1) + 3^2P(C_2) + 5^2P(C_3) - 9 = 9.8448 - 9 = 0.8448$
$\sqrt{Var(L)} = \sqrt{0.8448} \approx 0.9191$.

2. O treinador de uma selecção nacional de futebol tem três estratégias possíveis (estratégias 1, 2 e 3) para certo jogo de preparação para o Campeonato Mundial de Futebol de 2014. Seja Y o número da estratégia empregue no jogo de preparação e X uma variável aleatória que assume o valor 1 se a selecção ganhar o jogo e zero no caso contrário. Admita que a função de probabilidade conjunta de X e Y é definida por:

$$P\left(X = x, Y = y\right) = \begin{cases} \frac{2x+y}{18}, & x = 0,1;\ y = 1,2,3 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Calcule $E[X]$, $E[Y]$ e $E[XY]$, e diga se o resultado do jogo de preparação é independente da estratégia escolhida pelo treinador. (2.5)

$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y) = \sum_{y=1}^{3} \frac{2x+y}{18} = \frac{3(2x)+(1+2+3)}{18} = \frac{x+1}{3}$, $x = 0, 1$, e 0, caso contrário. Isto é, $X \sim Bern(p = \frac{2}{3})$. Logo, $E(X) = \sum_{x=0}^{1} xP(X = x) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ ou $E(X) = \frac{2}{3}$ (pelo formulário).
$P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y) = \sum_{x=0}^{1} \frac{2x+y}{18} = \frac{2y+2}{18} = \frac{y+1}{9}$, $y = 1, 2, 3$, e 0, caso contrário. Logo, $E(Y) = \sum_{y=1}^{3} yP(Y = y) = 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{3}{9} + 3 \times \frac{4}{9} = \frac{20}{9} \approx 2.222$.
$E(XY) = \sum_x \sum_y xyP(X = x, Y = y) = \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=1}^{3} xy\frac{2x+y}{18} = \sum_{y=1}^{3} \frac{y(2+y)}{18} = \frac{3+8+15}{18} = \frac{26}{18} \approx 1.444$.
Como $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{13}{9} - \frac{2}{3}\frac{20}{9} \approx -0.037 \neq 0$, X e Y são variáveis aleatórias dependentes.

(b) Se fosse o treinador dessa selecção, por qual das estratégias optaria? (2.0)

Escolher estratégia, y, que maximiza a probabilidade de ganhar, i.e., $y^* : \max_{y \in \{1,2,3\}} P(X = 1|Y = y)$.

$$P(X = 1|Y = y) = \frac{P(X=1, Y=y)}{P(Y=y)} = \begin{cases} \frac{(2+y)/18}{(y+1)/9} = \frac{y+2}{2(y+1)}, & y = 1,2,3, \\ \text{não está definido para outros valores de } y. \end{cases}$$

$P(X = 1|Y = 1) = 0.75$, $P(X = 1|Y = 2) = 2/3$, $P(X = 1|Y = 3) = 0.625$.
Logo, a estratégia 1 é aquela que maximiza a probabilidade de ganhar.