DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Probabilidades e Estatística

LEAN, LEE, LEGI, LETI, MEAer, MEBiom, MEEC, MEMec

2º semestre – 2013/2014
26/04/2014 – 11:00

Duração: 90 minutos **1º teste B**

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I 10 valores

1. Considere três acontecimentos A, B e C associados à mesma experiência aleatória. Mostre que: (1.5)

$$P(A) + P(B) + P(C) = P(A \cup B \cup C) + P(A \cap (B \cup C)) + P(B \cap C)$$

$P(A \cup B \cup C) + P(A \cap (B \cup C)) + P(B \cap C) =$
$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) + P((A \cap B) \cup (A \cap C)) + P(B \cap C)$
$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$
$= P(A) + P(B) + P(C)$

2. Sabe-se que com determinado tratamento se alcançam 70% de curas para certa doença, quando o mesmo é administrado a pacientes em condições bem definidas. Se o tratamento é aplicado a um grupo de 20 pacientes nessas condições:

(a) Determine a probabilidade de pelo menos 5 dos pacientes não serem curados. (3.0)

$P(\text{cura}) = 0.7$, $n = 20$ pacientes.
$X =$ nº doentes não curados em 20, nas condições requeridas.
$X \sim Bin(n = 20, p = 1 - 0.7 = 0.3)$ porque i) provas de Bernoulli independentes, ii) $p = P(\text{não cura}) = 0.3 =$ constante, iii) X conta o nº sucessos em $n = 20$ repetições.
$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F_{Bin(20,0.3)}(4) = 1 - 0.2375 = 0.7625$.

(b) Obtenha a probabilidade de no máximo quatro dos pacientes não serem curados, sabendo que no grupo há pelo menos um paciente que não é curado pelo tratamento. (2.5)

$P(X \leq 4 | X \geq 1) = \frac{P(X \leq 4, X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(0 < X \leq 4)}{1 - P(X = 0)} = \frac{F_{Bin(20,0.3)}(4) - F_{Bin(20,0.3)}(0)}{1 - F_{Bin(20,0.3)}(0)} = \frac{0.2375 - 0.0008}{0.0008} = 0.2386.$

3. O número de veículos que passam por minuto numa das portagens de uma auto-estrada durante os períodos de maior movimento é uma variável aleatória X com distribuição de Poisson tal que $P[X = 3] = P[X = 4]$. Admitindo como independentes o número de veículos que passam em minutos distintos, calcule a probabilidade de em 10 minutos desses períodos haver pelo menos 50 veículos a passarem nessa portagem. (3.0)

$X =$ nº veículos que passam por minuto numa das portagens de uma auto-estrada.
$X \sim Po(\lambda) : P(X = 3) = P(X = 4) \Leftrightarrow \frac{e^{-\lambda}\lambda^3}{3!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^4}{4!} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{4} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 4.$
$X_i =$ nº veículos que passam no minuto i pela portagem. X_i, $i = 1, \ldots, 10$, são independentes. Assim, $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim Po(\lambda_Y)$, onde $\lambda_Y = E(Y) = E(\sum_{i=1}^{10} X_i) = \sum_{i=1}^{10} E(X_i) \overset{i.d.}{=} 10E(X_1) = 10 \times 4 = 40.$
$P(Y \geq 50) = 1 - P(Y \leq 49) = 1 - F_{Po(40)}(49) = 1 - 0.9297 = 0.0703.$

Grupo II 10 valores

1. Em dia de descontos num posto de abastecimento de combustível, o tempo que um cliente tem de esperar até o seu veículo ser abastecido de combustível é uma variável aleatória, X, com distribuição exponencial de valor esperado igual a 10 minutos.

(a) Sabendo que um cliente já esperou por abastecimento 10 minutos, qual é a probabilidade de o cliente ter de esperar adicionalmente mais do que 30 minutos até o seu veículo ser abastecido de combustível? (2.0)

X = tempo que um cliente tem de esperar até ser atendido em dia de descontos (em minutos).
$X \sim Exp(\lambda)$, onde $E(X) = 10 = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = 0.1$.
$P(X > 40|X > 10) = P(X > 40 - 10)$, pela propriedade de falta de memória, $= \int_{30}^{\infty} 0.1e^{-0.1x}dx$
$= -e^{-0.1x}|_{30}^{\infty} = e^{-0.1\times 30} = e^{-3} \approx 0.0498$.

(b) Obtenha o 1º quartil de X, ou seja, o tempo de espera que não é excedido por 25% dos clientes. (1.5)

Seja $q_1 : P(X \le q_1) = 0.25 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{q_1} f_X(x)dx = \int_0^{q_1} 0.1e^{-0.1x}dx = 0.25$
$\Leftrightarrow\ -e^{-0.1x}|_0^{q_1} = 1 - e^{-0.1q_1} = 0.25 \Leftrightarrow\ -0.1q_1 = \log(0.75) \Leftrightarrow\ q_1 = -10\log(0.75) = 2.8768$.

(c) Calcule um valor aproximado para a probabilidade do tempo total de espera de 50 clientes ser superior a 5 horas, assumindo independência dos tempos de espera dos clientes em causa. (2.5)

Y = tempo total de espera de 50 clientes.
$Y = \sum_{i=1}^{50} X_i$, onde X_i é o tempo de espera do cliente i. $X_i \sim Exp(\lambda)$.
Considerando que i) X_i são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, ii) $E(X_i) = \frac{1}{\lambda} = 10$ e $Var(X_i) = \frac{1}{\lambda^2} = 100$,
$E(Y) = E(\sum_{i=1}^{50} X_i) = \sum_{i=1}^{50} E(X_i) \overset{i.d.}{=} 50E(X_i) = 500$
$Var(Y) = Var(\sum_{i=1}^{50} X_i) \overset{i.d.}{=} \sum_{i=1}^{50} Var(X_i) \overset{i.d.}{=} 50Var(X_i) = 5000$
Logo, pelo T.L.C. e como $n = 50 \gg 30$, $\sum_{i=1}^{50} X_i \overset{a}{\sim} N(500, \sigma_Y^2 = 5000)$ ou $\frac{\sum_{i=1}^{50} X_i - 500}{\sqrt{5000}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$.
Assim sendo, $P(Y > 5\times 60) = 1 - P(Y \le 300) = 1 - P(\frac{Y-500}{\sqrt{5000}} \le \frac{300-500}{\sqrt{5000}}) = 1 - \Phi(-2.83) = \Phi(2.83) \approx 0.9977$
ou $P(Y > 5\times 60) = 1 - F_{N(500,\sigma_Y^2=5000)}(300) \approx 1 - 0.0023 = 0.9977$.

2. Na proposta de referendo sobre co-adopção e adopção de crianças por casais do mesmo sexo, entretanto chumbada pelo Tribunal Constitucional, admita que X representa a posição de um eleitor sobre as questões colocadas ($X = 0$ - a favor de ambas; $X = 1$ - a favor de apenas da co-adopção; $X = 2$ - contra ambas) e Y o seu sentido de voto ($Y = 0$ - sim; $Y = 1$ - não; $Y = 2$ - abstenção/nulo/branco). Suponha que a função de probabilidade conjunta (incompleta) de (X, Y) é dada por

$X \backslash Y$	0	1	2
0	a	b	0.1
1	0.2	0.0	0.1
2	0.0	0.3	0.1

(a) Tendo em conta que $P(Y = 0|X = 0) = \frac{2}{3}$, determine a e b. (1.5)

$P(Y = 0|X = 0) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{P(X=0,Y=0)}{P(X=0)} = \frac{a}{a+b+0.1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3a = 2a + 2b + 0.2 \Leftrightarrow a = 2b + 0.2$ (1). Por outro lado, $\sum_x \sum_y P(X = x, Y = y) = 1 \Leftrightarrow a + b + 0.8 = 1$ (2). Substituindo (1) em (2) obtem-se: $2b + 0.2 + b + 0.8 = 1 \Leftrightarrow b = 0$ logo $a = 0.2$ por (1).

(b) Determine o valor esperado, a mediana e a variância da variável aleatória $X|Y = 2$. (2.5)

$P(X=x|Y=2) = \frac{P(X=x,Y=2)}{P(Y=2)}$ e $P(Y=2) = \sum_{x=0}^{2} P(X=x, Y=2) = 0.1+0.1+0.1 = 0.3$.
$P(X=x|Y=2) = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3}$, $x = 0,1,2$, e 0, caso contrário. Isto é, $X|Y=2 \sim Unif\{0,1,2\}$
$E(X|Y=2) = \sum_{x=0}^{2} xP(X=x|Y=2) = (0+1+2)\frac{1}{3} = 1$.
Mediana de $X|Y=2 : \xi$ tal que $P(X \geq \xi|Y=2) \geq 0.5 \wedge P(X \leq \xi|Y=2) \geq 0.5$.
Logo, $\xi = 1$ porque $P(X \leq 1|Y=2) = P(X=0|Y=2) + P(X=1|Y=2) = \frac{2}{3} \geq 0.5$ e $P(X \geq 1|Y=2) = P(X=1|Y=2) + P(X=2|Y=2) = \frac{2}{3} \geq 0.5$.
e $\xi \in]1,2]$ não é mediana porque $P(X \geq \xi|Y=2) = P(X \geq 2|Y=2) = \frac{1}{3} < 0.5$.
$E(X^2|Y=2) = \sum_{x=0}^{2} x^2 P(X=x|Y=2) = (0^2+1^2+2^2)\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$
$Var(X|Y=2) = E(X^2|Y=2) - E(X|Y=2)^2 = \frac{5}{3} - 1^2 = \frac{2}{3}$.