

Duração: 90 minutos

1º teste A

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I

10 valores

1. Três tipos de doenças D_1 , D_2 e D_3 são conhecidas por provocarem dores de cabeça. De longa experiência com estas doenças conclui-se que a sua prevalência na população é de $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{3}{20}$, respetivamente. Sabe-se ainda que as doenças não podem ocorrer simultaneamente no mesmo doente. Por outro lado, é sabido que as dores de cabeça ocorrem com probabilidade $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$, nas pessoas com as doenças D_1 , D_2 e D_3 , respetivamente, e na proporção de $\frac{1}{50}$ nas pessoas sem qualquer daquelas doenças. Escolhida uma pessoa ao acaso, diga qual a probabilidade de:

- (a) A pessoa ter dores de cabeça. (2.5)

Sendo os acontecimentos C = “ter dor de cabeça” e D_i = “ter doença do tipo i ”, $i = 1, 2, 3$, tem-se que $P(D_1) = 1/20$, $P(D_2) = 1/10$, $P(D_3) = 3/20$, $P(C | D_1) = 4/5$, $P(C | D_2) = 1/4$, $P(C | D_3) = 1/5$, $P(C | \bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3) = 1/50$ e que $P(D_i \cap D_j) = 0$, $\forall i \neq j$.
 $P(C) = \sum_{i=1}^3 P(C | D_i)P(D_i) + P(C | \bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3)P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3) \approx 0.109$ tendo em conta que $P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3) = 1 - \sum_{i=1}^3 P(D_i)$.

- (b) A pessoa ter a doença D_2 sabendo que tem dores de cabeça. (2.0)

$$P(D_2 | C) = \frac{P(C | D_2)P(D_2)}{P(C)} \approx 0.229.$$

2. Considere que o número de contentores que chegam por dia a um terminal portuário é uma variável aleatória com distribuição de Poisson com valor esperado igual a 40.

- (a) Calcule a probabilidade de chegarem ao terminal mais de 40 contentores num dia em que se sabe que chegaram no máximo 65 contentores. (2.5)

Seja X = “número de contentores que chegam por dia a um terminal portuário”. Tem-se que $X \sim Poi(\lambda)$ com $E[X] = \lambda = 40$.
 $P(X > 40 | X \leq 65) = \frac{P(40 < X \leq 65)}{P(X \leq 65)} = \frac{F_X(65) - F_X(40)}{F_X(65)} = \frac{0.9999 - 0.5419}{0.9999} \approx 0.4580$.

- (b) Considere que cada contentor é aberto para inspeção com probabilidade 0.02. Num dia em que cheguem 60 contentores, qual é o número mais provável de inspeções, se a escolha dos contentores para seleção for feita ao acaso? (3.0)

Seja Y = “número de contentores inspecionados num total de 60 contentores”. Tem-se que $Y \sim Bin(60, 0.02)$ uma vez que Y representa o número de sucessos numa sucessão de provas de Bernoulli independentes. Pretende-se a moda de Y definida por $\arg \max_{y \in \mathbb{R}} f_Y(y)$.

Seja $g(y) = \frac{f_Y(y+1)}{f_Y(y)} = \frac{(60-y)0.02}{(y+1)0.98}$, $y \in \{0, \dots, 59\}$. Como $g(0) < 1$ e $g(y) > 1$, $\forall y \geq 1$, tem-se que a moda de Y é igual a 1.

1. O tempo de atendimento num balcão de informações, em minutos, é uma variável aleatória X com a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{15}, & 1 < x < 4 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Determine o quantil de ordem 3/4 da variável aleatória X . (2.0)

$$F_X(x) = 3/4 \iff \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = 3/4 \iff \int_1^x \frac{2t}{15} dt = 3/4 \iff x = \frac{7}{2} \text{ uma vez que } x \in]1, 4[.$$

- (b) Seja (X_1, \dots, X_{100}) um vetor de variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição que X . (3.0)
Calcule a probabilidade aproximada de a média aritmética dessas 100 variáveis exceder 2 minutos.

Seja $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$. Pelo T.L.C. tem-se que $\frac{S-E[S]}{\sqrt{\text{Var}[S]}} \stackrel{d}{\sim} N(0, 1)$.

$E[S] \stackrel{i.i.d.}{=} 100E[X] = 280$ uma vez que $E[X] = \int_1^4 \frac{2x^2}{15} dx = 2.8$

$\text{Var}[S] \stackrel{i.i.d.}{=} 100\text{Var}[X] = 66$ uma vez que $E[X^2] = \int_1^4 \frac{2x^3}{15} dx = 8.5$ e $\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 0.66$

Assim, $P(\bar{X} > 2) = P(S > 200) \stackrel{T.L.C.}{\approx} 1 - F_{N(280, 66)}(200) \approx 1$.

2. Admita que a função de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y) é a seguinte:

$X \setminus Y$	0	1	2
0	0.0	0.4	0.0
1	0.3	0.2	0.1

- (a) Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y e comente o resultado obtido. (3.0)

$$f_X(x) = \sum_{y=0}^2 f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0.4, & x = 0 \\ 0.6, & x = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \iff X \sim \text{Ber}(0.6)$$

$$E[X] = 0.6 \text{ e } \text{Var}[X] = 0.24$$

$$f_Y(y) = \sum_{x=0}^1 f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0.3, & y = 0 \\ 0.6, & y = 1 \\ 0.1, & y = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E[Y] = \sum_{y=0}^2 y f_Y(y) = 0.8, \quad E[Y^2] = \sum_{y=0}^2 y^2 f_Y(y) = 1.0 \text{ e } \text{Var}[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 0.36$$

$$E[XY] = \sum_{x=0}^1 \sum_{y=0}^2 xy f_{X,Y}(x, y) = 0.4$$

$$\text{Corr}[X, Y] = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}} = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sqrt{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}} = -0.272$$

As variáveis têm uma fraca associação linear negativa.

- (b) Determine o valor de $E[(3X^2 + 4)Y]$. (2.0)

$$E[(3X^2 + 4)Y] = 3E[X^2Y] + 4E[Y] = 4.4 \text{ uma vez que } E[X^2Y] = \sum_{x=0}^1 \sum_{y=0}^2 x^2 y f_{X,Y}(x, y) = 0.4.$$