

Duração: 90 minutos

1º teste B

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I

10 valores

1. Um fabricante de calculadoras compra circuitos integrados a um de três fornecedores: A, B e C. 50% dos circuitos provêm do fornecedor A, 30% de B e os restantes de C. Sabe-se ainda que 1% dos circuitos fornecidos por A são defeituosos, enquanto que para o fornecedor B essa percentagem é de 3% e para C é de 4%.

- (a) Um circuito é selecionado ao acaso e avaliado, tendo-se verificado que é defeituoso. Qual a probabilidade de ter sido fornecido pelo fornecedor B? (3.0)

Sendo os acontecimentos $A(B, C)$ = “o circuito selecionado é proveniente do fornecedor $A(B, C)$ ” e D = “o circuito selecionado é defeituoso”, tem-se $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$, $P(C) = 0.2$, $P(D | A) = 0.01$, $P(D | B) = 0.03$ e $P(D | C) = 0.04$.

$$P(B | D) = \frac{P(D | B)P(B)}{P(D | A)P(A) + P(D | B)P(B) + P(D | C)P(C)} \approx 0.409.$$

- (b) Calcule a probabilidade de um circuito integrado não ser nem defeituoso nem ter sido fornecido pelo fornecedor A. (2.0)

$$P(\bar{D} \cap \bar{A}) = P(\overline{D \cup A}) = 1 - P(D \cup A) = 1 - [P(A) + P(D) - P(D \cap A)] = 1 - [P(A) + P(D) - P(D | A)P(A)] \approx 0.483.$$

2. Num sistema de codificação de mensagens o número de erros que ocorre ao longo do tempo segue um processo de Poisson de taxa 0.1 por segundo.

- (a) Determine a probabilidade de, em um minuto, ocorrer pelo menos 1 erro, sabendo que nesse minuto se registaram menos de 3 erros. (2.0)

Sendo $X(t)$ = “número de erros em t segundos”, tem-se que $X(t) \sim Poi(0.1t)$.

$$P(X(60) \geq 1 | X(60) < 3) = \frac{P(1 \leq X(60) < 3)}{P(X(60) < 3)} = \frac{F_{X(60)}(2) - F_{X(60)}(0)}{F_{X(60)}(2)} = \frac{0.0620 - 0.0025}{0.0620} \approx 0.96.$$

- (b) A ocorrência de erros de codificação tem custos por minuto associados, definidos da seguinte forma: se nesse período ocorrerem menos de 4 erros, o custo (em €) é igual ao quadrado do número de erros registados nesse período de tempo; caso contrário, o custo é fixo e igual a 20€. Determine o valor esperado do custo num período de 1 minuto. (3.0)

Seja C = “custo num período de 1 minuto, em euros” = $\begin{cases} X(60)^2, & X(60) < 4 \\ 20, & X(60) \geq 4 \end{cases}$.

$$f_C(c) = \begin{cases} f_{X(60)}(0) = 0.0025, & c = 0 \\ f_{X(60)}(1) = 0.0149, & c = 1 \\ f_{X(60)}(2) = 0.0446, & c = 4 \\ f_{X(60)}(3) = 0.0892, & c = 9 \\ 1 - F_{X(60)}(3) = 0.8488, & c = 20 \end{cases}$$

$$E[C] = \sum_c c f_C(c) = 17.97 \text{ euros.}$$

1. A distância ao alvo de um dardo atirado por um certo jogador é uma variável aleatória X com a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Determine a distância mediana ao alvo, que caracteriza o desempenho deste jogador. (2.0)

$$F_X(x) = 1/2 \iff \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = 1/2 \iff \int_0^x (1 - \frac{t}{2}) dt = 1/2 \iff x = 2 - \sqrt{2} \text{ uma vez que } x \in]0, 2[.$$

- (b) Considere 36 lançamentos independentes realizados por este jogador. Calcule a probabilidade aproximada de a distância média dos 36 lançamentos ser inferior a 1/2. (3.0)

Seja $S = \sum_{i=1}^{36} X_i$. Pelo T.L.C. tem-se que $\frac{S - E[S]}{\sqrt{\text{Var}[S]}} \stackrel{d}{\sim} N(0, 1)$.

$$E[S] \stackrel{i.i.d.}{=} 36E[X] = 24 \text{ uma vez que } E[X] = \int_0^2 x(1 - 0.5x) dx = 2/3$$

$$\text{Var}[S] \stackrel{i.i.d.}{=} 36\text{Var}[X] = 8 \text{ uma vez que } E[X^2] = \int_0^2 x^2(1 - 0.5x) dx = 2/3 \text{ e } \text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 2/9$$

$$\text{Assim, } P(\bar{X} < 0.5) = P(S < 18) \stackrel{T.L.C.}{\approx} F_{N(24,8)}(18) \approx 0.017.$$

2. Considere o vector aleatório (X, Y) cuja função de probabilidade conjunta é apresentada a seguir:

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

- (a) Calcule a variância de $(X + Y)$. Serão X e Y variáveis aleatórias independentes? Justifique a sua resposta. (3.0)

$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2/3, & x = -1 \\ 1/3, & x = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E[X] = \sum_{x=-1,1} x f_X(x) = -1/3, E[X^2] = \sum_{x=-1,1} x^2 f_X(x) = 1 \text{ e } \text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 8/9$$

$$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/3, & y = -1 \\ 1/3, & y = 0 \\ 1/3, & y = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E[Y] = \sum_{y=0}^2 y f_Y(y) = 0, E[Y^2] = \sum_{y=0}^2 y^2 f_Y(y) = 2/3 \text{ e } \text{Var}[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 2/3$$

$$E[XY] = \sum_{x=-1,1} \sum_{y=-1}^1 x y f_{X,Y}(x, y) = 0$$

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = 0$$

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}[X, Y] = 14/9$$

As variáveis não são independentes porque, por exemplo, $0 = f_{X,Y}(1, 0) \neq f_X(1)f_Y(0) = 1/9$.

- (b) Determine a correlação entre $3X$ e $(X + Y)$. (2.0)

Sugestão: Se não resolveu a alínea (a), considere que a variância de $(X + Y)$ é 2.

$$\text{Corr}[3X, X + Y] = \frac{\text{Cov}[3X, X + Y]}{\sqrt{\text{Var}[3X]\text{Var}[X + Y]}} = \frac{3\text{Cov}[X, X] + 3\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{9\text{Var}[X]\text{Var}[X + Y]}} = \frac{3\text{Var}[X] + 3\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{9\text{Var}[X]\text{Var}[X + Y]}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \approx 0.756.$$