

Duração: 90 minutos

1º Teste B

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I

10 valores

1. Vários estudos têm mostrado que o consumo excessivo de tabaco pode provocar doenças nos pulmões e na bexiga e que estas doenças se manifestam independentemente uma da outra, tanto em indivíduos fumadores com em não fumadores. Num grupo de interesse, verificou-se que 20% dos indivíduos são fumadores, 40% dos indivíduos fumadores são doentes pulmonares, 25% dos indivíduos não fumadores são doentes pulmonares e 76% dos indivíduos fumadores não são doentes da bexiga. Tendo sido escolhido, ao acaso, um indivíduo do referido grupo:

(a) Calcule a probabilidade de o indivíduo selecionado ter doença pulmonar. (2.0)

• **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Evento	Probabilidade
$DP = \{\text{indivíduo tem doença pulmonar}\}$	$P(DP) = ?$
$DB = \{\text{indivíduo tem doença na bexiga}\}$	$P(DB) = ?$
$F = \{\text{indivíduo é fumador}\}$	$P(F) = 0.2$
	$P(DP F) = 0.4$
	$P(DP \bar{F}) = 0.25$
	$P(\bar{DB} F) = 0.76$

• **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned}
 P(DP) &= P(DP | F) \times P(F) + P(DP | \bar{F}) \times P(\bar{F}) && \text{(lei da probabilidade total)} \\
 &= P(DP | F) \times P(F) + P(DP | \bar{F}) \times [1 - P(F)] \\
 &= 0.4 \times 0.2 + 0.25 \times (1 - 0.2) \\
 &= 0.28.
 \end{aligned}$$

(b) Dado que o indivíduo selecionado é fumador, qual é a probabilidade de ter doença pulmonar ou da bexiga? (2.0)

• **Probabilidade pedida:** $P[(DP \cup DB) | F]$

Tirando partido do facto de os acontecimentos DP e DB serem condicionalmente independentes dado F , i.e.,

$$P[(DP \cap DB) | F] = P(DP | F) \times P(DB | F),$$

temos

$$\begin{aligned}
 P[(DP \cup DB) | F] &= P(DP | F) + P(DB | F) - P[(DP \cap DB) | F] \\
 &= P(DP | F) + P(DB | F) - P(DP | F) \times P(DB | F) \\
 &= P(DP | F) + [1 - P(\bar{DB} | F)] - P(DP | F) \times [1 - P(\bar{DB} | F)] \\
 &= 0.4 + (1 - 0.76) - 0.4 \times (1 - 0.76) \\
 &= 0.544.
 \end{aligned}$$

2. Paragens não programadas de uma máquina industrial de corte e gravação a laser em uso contínuo ocorrem segundo um processo de Poisson com taxa mensal igual a 3.

- (a) Qual é a probabilidade de terem ocorrido menos de 4 paragens não programadas da máquina num mês, sabendo que nesse mesmo mês ocorreu pelo menos uma dessas paragens? (2.0)

• **Variável aleatória de interesse**

X = número de paragens não programadas da máquina num mês

• **Distribuição de X**

Dado que lidamos com um processo de Poisson com taxa igual a 3 paragens por mês, temos $X \sim \text{Poisson}(3)$.

• **Ep. de X**

$$P(X = x) = \frac{e^{-3} 3^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

• **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X < 4 | X \geq 1) &= \frac{P(X < 4, X \geq 1)}{P(X \geq 1)} \\ &= \frac{P(1 \leq X < 4)}{1 - P(X = 0)} \\ &= \frac{P(0 < X \leq 3)}{1 - P(X = 0)} \\ &= \frac{F_X(3) - F_X(0)}{1 - F_X(0)} \\ &\stackrel{\text{tabela/ calc.}}{=} \frac{0.6472 - 0.0498}{1 - 0.0498} \\ &\approx 0.6287. \end{aligned}$$

[Alternativamente,

$$\begin{aligned} P(X < 4 | X \geq 1) &= \dots \\ &= \frac{\sum_{x=1}^3 P(X = x)}{1 - P(X = 0)} \\ &= \frac{3e^{-3} + \frac{9e^{-3}}{2} + \frac{27e^{-3}}{6}}{1 - e^{-3}} \\ &= \frac{12e^{-3}}{1 - e^{-3}} \\ &\approx 0.6287.] \end{aligned}$$

- (b) Obtenha a mediana do número de paragens não programadas da máquina num mês. (2.0)

• **Mediana de X**

Represente-se a mediana de X por $me(X)$. Então

$$me(X) : \frac{1}{2} \leq F_X[me(X)] \leq \frac{1}{2} + P[X = me(X)] \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \leq F_X[me(X)] \leq \frac{1}{2} + [F_X[me(X)] - F_X[me(X)^-]]$$

$$F_X[me(X)^-] \leq \frac{1}{2} \leq F_X[me(X)]. \quad (2)$$

Ora, tirando partido da definição de mediana em (1) e de

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \leq F_X(3) \stackrel{(a)}{=} 0.6472 &\leq \frac{1}{2} + P(X = 3) = \frac{1}{2} + [F_X(3) - F_X(2)] \\ &= \frac{1}{2} + (0.6472 - 0.4232) = 0.7240, \end{aligned}$$

concluimos que $me(X) = 3$.

[Em alternativa, notemos que $F_X(3) = P(X \leq 3) \stackrel{(a)}{=} 0.6472 \geq \frac{1}{2}$; mais, de uma nova consulta da tabela da f.d. da Poisson tem-se $F_X(2) = F_X(3^-) = 0.4232 \leq \frac{1}{2}$. Logo o resultado (2), leva-nos a concluir que $me(X) = 3$.]

- (c) Obtenha a probabilidade de o intervalo entre duas paragens não programadas consecutivas da máquina não exceder um mês. (2.0)

- **Variável aleatória de interesse**

T = intervalo (em meses) entre duas paragens não programadas consecutivas da máquina

- **Distribuição de T**

Uma vez que lidamos com um processo de Poisson com taxa igual a 3 paragens por mês, temos $T \sim \text{Exponencial}(\lambda = 3)$.

- **Ed.p. de T**

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 3 \times e^{-3t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(T \leq 1) &= \int_0^1 3 \times e^{-3t} dt \\ &= -e^{-3t} \Big|_0^1 \\ &= 1 - e^{-3} \\ &\approx 0.9502. \end{aligned}$$

Resolução alternativa

- **Variável aleatória de interesse**

T = intervalo (em meses) entre duas paragens não programadas consecutivas da máquina

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(T \leq 1) &= 1 - P(T > 1) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \frac{e^{-3} \times 3^0}{0!} \\ &= 1 - e^{-3} \\ &\approx 0.9502. \end{aligned}$$

Grupo II	10 valores
-----------------	------------

1. O controlo de qualidade de azulejos fabricados artesanalmente numa empresa consiste na inspeção de 10 azulejos, escolhidos ao acaso e sem reposição, de cada lote de 100 azulejos produzidos.

(a) Admitindo que existem 3 azulejos não conformes num desses lotes de azulejos, qual é a probabilidade de serem detetados quanto muito 2 azulejos não conformes na respetiva inspeção? (2.0)

- **Variável aleatória de interesse**

X = número de azulejos não conformes numa amostra de 10 azulejos seleccionados ao acaso e SEM reposição de um lote com 100, dos quais 3 são não conformes

- **Distribuição de X**

$X \sim \text{Hipergeométrica}(N, M, n)$

com:

$N = 100$ (azulejos no lote);

$M = 3$ (azulejos não conformes no lote);

$n = 10$ (azulejos seleccionados ao acaso e SEM reposição).

- **Ep. de X**

$$\begin{aligned} P(X = x) &\stackrel{\text{form.}}{=} \begin{cases} \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & x = \max\{0, n - (N - M)\}, \dots, \min\{n, M\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\binom{3}{x} \binom{100-3}{10-x}}{\binom{100}{10}}, & x = 0, 1, 2, 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

• **Prob. pedida**

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 2) &= 1 - P(X > 2) \\
 &= 1 - P(X = 3) \\
 &= 1 - \frac{\binom{3}{3} \binom{100-3}{10-3}}{\binom{100}{10}} \\
 &= 1 - \frac{\binom{97}{7}}{\binom{100}{10}} \\
 &= 1 - \frac{97!}{7!90!} \\
 &= 1 - \frac{100!}{10!90!} \\
 &= 1 - \frac{97!}{7!} \frac{100 \times 99 \times 98 \times 97!}{10 \times 9 \times 8 \times 7!} \\
 &= 1 - \frac{10 \times 9 \times 8}{100 \times 99 \times 98} \\
 &= \frac{2693}{2695} \\
 &\approx 0.999256.
 \end{aligned}$$

- (b) Supondo que a percentagem de azulejos não conformes é de 3%, obtenha um valor aproximado da probabilidade de em 50 lotes o controlo de qualidade detetar mais de 25 azulejos não conformes. (3.0)

• **Variável aleatória de interesse**

X_i = número de azulejos não conformes na amostra i , $i = 1, \dots, n^*$
 $n^* = 50$

• **Distribuição, valor esperado e variância comuns**

$X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} X$, $i = 1, \dots, n^*$

$X \sim$ Hipergeométrica(N, M, n), com $(N, M, n) = (100, 3, 10)$

$$E(X_i) = E(X) = \mu \stackrel{form.}{=} n \frac{M}{N} = 10 \times \frac{3}{100} = 0.3, \quad i = 1, \dots, n^*$$

$$V(X_i) = V(X) = \sigma^2 \stackrel{form.}{=} n \frac{M}{N} \frac{N-M}{N} \frac{N-n}{N-1} = 10 \times \frac{3}{100} \times \frac{97}{100} \times \frac{90}{99} = \frac{291}{1100} = 0.26(45), \quad i = 1, \dots, n^*$$

• **Nova v.a.**

$S_{n^*} = \sum_{i=1}^{n^*} X_i$ = número de azulejos não conformes nas n^* amostras

• **Valor esperado e variância de S_{n^*}**

$$E(S_{n^*}) = E\left(\sum_{i=1}^{n^*} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n^*} E(X_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} n^* E(X) = n^* \mu = 50 \times 0.3 = 15$$

$$V(S_{n^*}) = V\left(\sum_{i=1}^{n^*} X_i\right) \stackrel{X_i indep.}{=} \sum_{i=1}^{n^*} V(X_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} n^* V(X) = n^* \sigma^2 = 50 \times \frac{291}{1100} = \frac{291}{22} \approx 13.2273$$

• **Distribuição aproximada de \bar{X}**

Pelo teorema do limite central (TLC) pode escrever-se

$$\frac{S_{n^*} - E(S_{n^*})}{\sqrt{V(S_{n^*})}} = \frac{S_{n^*} - n^* \mu}{\sqrt{n^*} \sigma} \stackrel{a}{\sim} \text{Normal}(0, 1).$$

• **Valor aproximado da prob. pedida**

$$\begin{aligned}
 P(S_{n^*} > 25) &= 1 - P(S_{n^*} \leq 25) \\
 &= 1 - P\left(\frac{S_{n^*} - n^* \mu}{\sqrt{n^*} \sigma} \leq \frac{25 - n^* \mu}{\sqrt{n^*} \sigma}\right) \\
 &\stackrel{TLC}{\approx} 1 - \Phi\left(\frac{25 - 15}{\sqrt{13.2273}}\right) \\
 &\approx 1 - \Phi(2.75) \\
 &\stackrel{tabela/calc.}{\approx} 1 - 0.9970 \\
 &= 0.0030.
 \end{aligned}$$

2. Num pequeno laboratório químico trabalham dois engenheiros e dois estagiários. Suponha que as

variáveis aleatórias X (resp. Y) indicam o número de engenheiros (resp. estagiários) envolvidos no desenvolvimento de um projecto seleccionado ao acaso. Admita que a função de probabilidade conjunta de (X, Y) é dada pela tabela seguinte:

X	Y		
	0	1	2
0	0	0.1	0.1
1	0.1	0.3	0
2	0.05	0.2	0.15

- (a) Averigüe se $E(X | Y = 1) = E(X)$. Que pode concluir relativamente à independência entre as variáveis aleatórias X e Y ? (2.0)

• **Par aleatório** (X, Y)

$X = n^{\circ}$ de engenheiros envolvidos no desenvolvimento do projecto seleccionado

$Y = n^{\circ}$ de estagiários envolvidos no desenvolvimento de um projecto seleccionado

• **Ep. conjunta e f.p. marginais**

$P(X = x, Y = y)$, $P(X = x) = \sum_{y=0}^2 P(X = x, Y = y)$ e $P(Y = y) = \sum_{x=0}^2 P(X = x, Y = y)$ encontram-se sumariadas na tabela seguinte:

X	Y			$P(X = x)$
	0	1	2	
0	0	0.1	0.1	0.2
1	0.1	0.3	0	0.4
2	0.05	0.2	0.15	0.4
$P(Y = y)$	0.15	0.6	0.25	1

• **Ep. de $X | Y = 1$**

$$P(X = x | Y = 1) = \frac{P(X = x, Y = 1)}{P(Y = 1)}$$

$$= \begin{cases} \frac{0.1}{0.6} = \frac{1}{6}, & x = 0 \\ \frac{0.3}{0.6} = \frac{1}{2}, & x = 1 \\ \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}, & x = 2 \\ 0, & \text{restantes valores de } x \end{cases}$$

• **Valor esperado de $X | Y = 1$**

$$E(X | Y = 1) = \sum_{x=0}^2 x \times P(X = x | Y = 1)$$

$$= 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{7}{6}$$

$$= 1.1(6)$$

• **Valor esperado de X**

$$E(X) = \sum_{x=0}^2 x \times P(X = x)$$

$$= 0 \times 0.2 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.4$$

$$= 1.2$$

• **Comentário**

Note-se que caso X e Y fossem v.a. independentes então $(X | Y = 1)$ e X possuíam a mesma distribuição e, consequentemente, $E(X | Y = 1) = E(X)$. Ora,

$$E(X | Y = 1) = 1.1(6)$$

\neq

$$E(X) = 1.2,$$

logo X e Y são v.a. DEPENDENTES.

- (b) Obtenha o valor esperado e a variância da variável aleatória $(X + Y)$, que representa o número total de engenheiros e estagiários envolvidos no desenvolvimento de um projecto selecionado ao acaso. (3.0)

• **Valor esperado pedido**

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= E(X) + E(Y) \\ &\stackrel{(a)}{=} 1.2 + \sum_{y=0}^2 y \times P(Y = y) \\ &\stackrel{(a)}{=} 1.2 + (0 \times 0.15 + 1 \times 0.6 + 2 \times 0.25) \\ &= 1.2 + 1.1 \\ &= 2.3 \end{aligned}$$

• **Variância pedida**

Uma vez que se pretende calcular

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= V(X) + V(Y) + 2 \times cov(X, Y) \\ &= V(X) + V(Y) + 2 \times [E(XY) - E(X) \times E(Y)], \end{aligned}$$

serão necessários alguns cálculos auxiliares que envolverão as f.p. conjunta de (X, Y) e marginais de X e Y obtidas na alínea anterior.

• **Valor esperado e variância de X**

$$\begin{aligned} E(X) &\stackrel{(a)}{=} 1.2 \\ V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= \sum_{x=0}^2 x^2 \times P(X = x) - 1.2^2 \\ &= (0^2 \times 0.2 + 1^2 \times 0.4 + 2^2 \times 0.4) - 1.2^2 \\ &= 2 - 1.44 \\ &= 0.56 \end{aligned}$$

• **Valor esperado e variância de Y**

$$\begin{aligned} E(Y) &= 1.1 \\ V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\ &= \sum_{y=0}^2 y^2 \times P(Y = y) - 1.2^2 \\ &= (0^2 \times 0.15 + 1^2 \times 0.6 + 2^2 \times 0.25) - 1.1^2 \\ &= 1.6 - 1.21 \\ &= 0.39 \end{aligned}$$

• **Valor esperado de XY**

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^2 xy \times P(X = x, Y = y) \\ &= 1 \times 1 \times 0.3 + 2 \times 1 \times 0.2 + 2 \times 2 \times 0.15 \\ &= 1.3 \end{aligned}$$

• **Covariância**

$$\begin{aligned} cov(X, Y) &= E(XY) - E(X) \times E(Y) \\ &= 1.3 - 1.2 \times 1.1 \\ &= -0.02 \end{aligned}$$

• **Variância pedida (cont.)**

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= V(X) + V(Y) + 2 \times cov(X, Y) \\ &= 0.56 + 0.39 + 2 \times (-0.02) \\ &= 0.91. \end{aligned}$$