Instituto Superior Técnico

Lógica Funcional e Teoria da Demonstração

15 de Junho de 2012

Recorde as definições $\boldsymbol{K} \equiv \lambda xy.x$, $\boldsymbol{S} \equiv \lambda xyz.xz(yz)$ e $\boldsymbol{X} \equiv \lambda x.x\boldsymbol{KSK}$, a representação-$\lambda$ dos Booleanos, $\boldsymbol{Verd} \equiv \lambda xy.x$ e $\boldsymbol{Falso} \equiv \lambda xy.y$, pares ordenados $[\_,\_] \equiv \lambda xyz.zxy$ e projecções $(\_)_0 \equiv \lambda x.x\boldsymbol{Verd}$ e $(\_)_1 \equiv \lambda x.x\boldsymbol{Falso}$, e dos números naturais, $\ulcorner 0 \urcorner \equiv \lambda x.x$, $\boldsymbol{Suc} \equiv \lambda x.[\boldsymbol{Falso}, x]$, $\boldsymbol{Pred} \equiv \lambda x.(x)_0$ e $\boldsymbol{Zero?} \equiv \lambda x.(x)_1$.

Grupo I (3+2)

a) Termos-λ M, N dizem-se *equivalentes para λ-solubilidade* quando, qualquer que seja $F \in \Lambda$, FN é λ-solúvel se e só se FM é λ-solúvel.

Demonstre que $\mathcal{H}^* = \{M = N : M, N \text{ equivalentes para } \lambda\text{-solubilidade}\}$ é uma teoria-λ. Conclua que $\mathcal{H}^*$ é coerente.

b) Demonstra-se que se M é λ-insolúvel e FM é λ-solúvel então FN é λ-solúvel para qualquer $N \in \Lambda$.

Use este facto e o resultado anterior para mostrar que é λ-coerente o conjunto $\mathcal{H} = \{M = N : M, N \text{ insolúveis}\}$.

Grupo II (2+3+2)

a) Demonstre que qualquer que seja $M \in \Lambda^0$ existe $M_{\boldsymbol{X}}$ obtido apenas por aplicações a partir do combinador $\boldsymbol{X}$ tal que $\vdash_\lambda M = M_{\boldsymbol{X}}$.

b) Use o resultado anterior para construir um *enumerador* de combinadores $\boldsymbol{E}$ tal que $\vdash_\lambda \boldsymbol{E}\ulcorner \#M \urcorner = M$ para qualquer $M \in \Lambda^0$.

c) Um termo-λ M diz-se *idempotente* se satisfaz $\vdash_\lambda MM = M$.

Demonstre que não é decidível o problema de determinar se um termo-λ dado é ou não idempotente.

Grupo III (2+2)

a) Demonstre que se D e D' são domínios algébricos então também $D \times D'$ é um domínio algébrico.

b) Demonstre o isomorfismo de Curry-Howard entre $\lambda_\to$ e a formulação à Hilbert do fragmento implicativo da lógica intuicionista positiva.