Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação
Licenciatura em Ciências Informáticas
Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores

Programação Funcional

21 de Janeiro de 2006

Exame: 12 valores **Duração: 3h**

Recorde a representação-λ dos Booleanos, $\boldsymbol{Verd} \equiv \lambda xy.x$ e $\boldsymbol{Falso} \equiv \lambda xy.y$, dos números naturais, $\ulcorner 0 \urcorner \equiv \lambda x.x$, $\boldsymbol{Suc} \equiv \lambda xy.y\boldsymbol{Falso}x$, $\boldsymbol{Pred} \equiv \lambda x.x\boldsymbol{Falso}$ e $\boldsymbol{Zero?} \equiv \lambda x.x\boldsymbol{Verd}$, e os combinadores $\boldsymbol{K} \equiv \lambda xy.x$, $\boldsymbol{S} \equiv \lambda xyz.xz(yz)$, $\boldsymbol{I} \equiv \lambda x.x$ e $\boldsymbol{Y} \equiv \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$.

Grupo I (1.5+1.5)

a) Demonstre que se $M \twoheadrightarrow_\beta N$ então $vl(N) \subseteq vl(M)$.

b) Considere o combinador $\boldsymbol{Max}$ definido por

$$\boldsymbol{Y}\,(\lambda fxy.\,(\boldsymbol{Zero?}\,x)\,y\,((\boldsymbol{Zero?}\,y)\,x\,(\boldsymbol{Suc}\,(f\,(\boldsymbol{Pred}\,x)\,(\boldsymbol{Pred}\,y)))).$$

Demonstre que uma teoria-λ $\mathcal{T}$ é incoerente se e só se existem $n, m \in I\!N_o$ tais que $n < m$ e $\mathcal{T} \vdash_\lambda \boldsymbol{Max}\ulcorner n \urcorner \ulcorner m \urcorner = \ulcorner n \urcorner$.

Grupo II (1.5+1.5+1.5+1.5)

a) Use os resultados da lógica combinatória para construir um termo-λ A, constituído apenas por aplicações dos combinadores $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{S}$, para o qual se verifique $\vdash_\lambda A = \lambda xy.x(yy)$. Confirme o resultado obtido.

b) Seja $\varphi : I\!N_o \to I\!N_o$ uma função total computável. Construa um combinador $\boldsymbol{Sup}$ tal que, para qualquer $n \in I\!N_o$, se tenha que $\vdash_\lambda \boldsymbol{Sup}\ulcorner n \urcorner = \ulcorner \max\{\varphi(i) : 0 \leq i \leq n\} \urcorner$. Demonstre a sua correcção.

c) Um termo-λ M diz-se *solúvel simples* se existe $N \in \Lambda$ tal que $\vdash_\lambda MN = \boldsymbol{I}$. Demonstre que não é recursivo o conjunto $\{\sharp M : M \text{ é solúvel simples}\}$. Será recursivamente enumerável? Justifique.

d) Seja $P : I\!N_o^2 \to I\!N_o$ uma bijecção efectiva. Demonstre que $X \subseteq I\!N_o$ é um conjunto recursivamente enumerável se e só se existe um conjunto recursivo $R \subseteq I\!N_o$ tal que $X = \{n \in I\!N_o : \text{existe } m \in I\!N_o \text{ tal que } P(n,m) \in R\}$.

Grupo III (1.5+1.5)

a) Verifique se $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{KK})$ é tipificável no sistema $\lambda_\to$ e indique, caso exista, um seu tipo principal.

b) Demonstre que se $\Gamma \vdash_{\lambda_\to} N : \rho$ e $\Gamma \cup \{x : \rho\} \vdash_{\lambda_\to} M : \sigma$ então $\Gamma \vdash_{\lambda_\to} M[x := N] : \sigma$. Explique a importância deste resultado no contexto da invariância dos tipos $\lambda_\to$ face à redução-β.