Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação
Licenciatura em Ciências Informáticas
Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores

Programação Funcional

9 de Fevereiro de 2006

Exame: 12 valores **Duração: 3h**

Recorde a representação-λ dos Booleanos, $\boldsymbol{Verd} \equiv \lambda xy.x$ e $\boldsymbol{Falso} \equiv \lambda xy.y$, dos números naturais, $\ulcorner 0 \urcorner \equiv \lambda x.x$, $\boldsymbol{Suc} \equiv \lambda xy.y\boldsymbol{Falso}x$, $\boldsymbol{Pred} \equiv \lambda x.x\boldsymbol{Falso}$ e $\boldsymbol{Zero?} \equiv \lambda x.x\boldsymbol{Verd}$, e os combinadores $\boldsymbol{K} \equiv \lambda xy.x$, $\boldsymbol{S} \equiv \lambda xyz.xz(yz)$, $\boldsymbol{I} \equiv \lambda x.x$ e $\boldsymbol{Y} \equiv \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$.

Grupo I (1.5+1.5)

a) Demonstre que se M é um combinador e $M \twoheadrightarrow_\beta N$ então N também é um combinador.

b) Considere o combinador ***Igual?*** definido por

$$\boldsymbol{Y}\,(\lambda fxy.\,(\boldsymbol{Zero?}\,x)\,(\boldsymbol{Zero?}\,y)\,((\boldsymbol{Zero?}\,y)\,\boldsymbol{Falso}\,(f\,(\boldsymbol{Pred}\,x)\,(\boldsymbol{Pred}\,y)))).$$

Demonstre que uma teoria-λ $\mathcal{T}$ é coerente se e só se não existem $n, m \in I\!N_o$ tais que $n \neq m$ e $\mathcal{T} \vdash_\lambda \boldsymbol{Igual?}\,\ulcorner n \urcorner \ulcorner m \urcorner = \boldsymbol{Verd}$.

Grupo II (1.5+1.5+1.5+1.5)

a) Use os resultados da lógica combinatória para construir um termo-λ B, constituído apenas por aplicações dos combinadores $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{S}$, para o qual se verifique $\vdash_\lambda B = \lambda xy.y(yx)$. Confirme o resultado obtido.

b) Seja $\varphi : I\!N_o \to I\!N_o$ uma função total computável. Construa um combinador ***Pfs*** tal que, para qualquer $n \in I\!N_o$, se tenha que $\vdash_\lambda \boldsymbol{Pfs}\,\ulcorner n \urcorner = \ulcorner r \urcorner$ onde r é o número de elementos do conjunto $\{0 \leq i \leq n : \varphi(i) = i\}$. Demonstre a sua correcção.

c) Diz-se que $B \subseteq I\!N_o$ e $C \subseteq I\!N_o$ são *recursivamente separáveis* se existe um conjunto recursivo $A \subseteq I\!N_o$ tal que $B \subseteq A$ e $C \cap A = \emptyset$. Demonstre que se B e C são λ-fechados e recursivamente separáveis então $B = \emptyset$ ou $C = \emptyset$.

d) Seja $\psi : I\!N_o \to I\!N_o$ uma função total computável. Dado $A \subseteq I\!N_o$ considere $\psi[A] = \{\psi(n) : n \in A\}$ e $\psi^{-1}[A] = \{n \in I\!N_o : \psi(n) \in A\}$. Verifique se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

1. se A é recursivo então $\psi[A]$ e $\psi^{-1}[A]$ são recursivos;
2. se A é recursivamente enumerável então $\psi[A]$ e $\psi^{-1}[A]$ são recursivamente enumeráveis.

Grupo III (1.5+1.5)

a) Verifique se ***SI*** é tipificável no sistema $\lambda_\to$ e indique, caso exista, um seu tipo principal.

b) Demonstre que se $\Gamma \vdash_{\lambda_\to} M : \sigma$ e $M \twoheadrightarrow_\beta N$ então $\Gamma \vdash_{\lambda_\to} N : \sigma$.