Instituto Superior Técnico
Teoria da Computação - LEIC 2013/2014
Aulas práticas 7 e 8

1. Considere a linguagem

$$A_{TM} = \{<M, w>:\ M \text{ é uma máquina de Turing que aceita } w\}.$$

   (a) Mostre que A_{TM} é semidecidível.

   (b) Mostre que o *problema da aceitação* relativo a máquinas de Turing não é decidível, ou seja, mostre que a linguagem A_{TM} não é decidível.

   (c) Mostre que a linguagem complementar de A_{TM} não é reconhecida por nenhuma máquina de Turing.

2. Mostre que o *problema da paragem* relativo a máquinas de Turing não é decidível, ou seja, mostre não é decidível a linguagem

$$HALT_{TM} = \{<M, w>:\ M \text{ é uma máquina de Turing que aceita ou rejeita } w\}.$$

3. Mostre que o *problema da linguagem vazia* relativo a máquinas de Turing não é decidível, ou seja, mostre não é decidível a linguagem

$$E_{TM} = \{<M>:\ M \text{ é uma máquina de Turing e } L_M = \{\}\}.$$

4. Mostre que o *problema da equivalência* relativo a máquinas de Turing não é decidível, ou seja, mostre não é decidível a linguagem

$$EQ_{TM} = \{<M_1, M_2>:\ M_1,\ M_2 \text{ são máquinas de Turing e } L_{M_1} = L_{M_2}\}.$$

5. Seja Σ um alfabeto e p uma palavra sobre Σ. Mostre que não é decidível a linguagem

$$DOM^p_{TM} = \{<M>:\ M \text{ é uma máquina de Turing que aceita } p\}.$$

   A não decidibilidade desta linguagem é também conhecida como a não decidibilidade do *"input problem"*.

   Sugestão: efectue uma prova por absurdo usando o facto de a linguagem A_{TM} não ser decidível.

6. Seja Σ um alfabeto e p uma palavra sobre Σ. Mostre que não é decidível a linguagem

$$CDOM^p_{TM} = \{<M>:\ M \text{ é uma máquina de Turing que escreve } p\}.$$

   A expressão "M escreve p" significa aqui que existe pelo menos uma configuração inicial a partir da qual M chega a uma configuração de aceitação na qual o conteúdo da fita é p. A não decidibilidade desta linguagem é também conhecida como a não decidibilidade do *"printing problem"*.

   Sugestão: efectue uma prova por absurdo usando o facto de a linguagem A_{TM} não ser decidível.

7. Mostre que não é decidível a linguagem

$$\begin{aligned} FIN_{TM} = \{<M>:\ & M \text{ é uma máquina de Turing} \\ & \text{e } L_M \text{ é uma linguagem finita}\} \end{aligned}$$

Sugestão: efectue uma prova por absurdo usando o facto de a linguagem A_{TM} não ser decidível.

8. Mostre que não é decidível a linguagem

$$\begin{aligned} PAR_{TM} = \{<M>:\ & M \text{ é uma máquina de Turing} \\ & \text{e as palavras aceites por } M \text{ têm comprimento par }\} \end{aligned}$$

Sugestão: efectue uma prova por absurdo usando o facto de a linguagem A_{TM} não ser decidível.

9. Mostre que não é decidível a linguagem

$$\begin{aligned} IMP_{TM} = \{<M>:\ & M \text{ é uma máquina de Turing} \\ & \text{e as palavras aceites por } M \text{ têm comprimento ímpar}\} \end{aligned}$$

Sugestão: efectue uma prova por absurdo usando o facto de a linguagem A_{TM} não ser decidível.

10. Considere o universo das máquinas de Turing com alfabeto $\{0,1\}^*$ e as linguagens sobre $\{0,1\}$.

    (a) Mostre que não é decidível a linguagem

    $$\begin{aligned} L = \{<M>:\ & M \text{ é uma máquina de Turing,} \\ & \text{e } L_M \text{ é o conjunto das palavras que começam e terminam em } 0\} \end{aligned}$$

    Sugestão: efectue uma prova por absurdo usando o facto de a linguagem A_{TM} não ser decidível.

    (b) Mostre que não é decidível a linguagem

    $$\begin{aligned} L = \{<M>:\ & M \text{ é uma máquina de Turing, e } L_M \\ & \text{é o conjunto das palavras que têm o mesmo número de 0's e de 1's}\} \end{aligned}$$

    Sugestão: efectue uma prova por absurdo usando o facto de a linguagem A_{TM} não ser decidível.

    (c) Mostre que não é decidível a linguagem

    $$\begin{aligned} L = \{<M>:\ & M \text{ é uma máquina de Turing,} \\ & \text{e } L_M \text{ é o conjunto de todos palíndromos}\} \end{aligned}$$

    Sugestão: efectue uma prova por absurdo usando o facto de a linguagem A_{TM} não ser decidível.

11. Uma *gramática* é um tuplo $G = (V, \Sigma, P, S)$ em que

    - V é um conjunto finito (conjunto dos símbolos auxiliares)

- Σ é um alfabeto
- P é um conjunto finito de regras de substituição (ou produções); uma regra de substituição é uma expressão $\alpha \to \beta$ em que $\alpha, \beta \in (\Sigma \cup V)^*$ e α tem pelo menos um símbolo em V
- $S \in V$ (símbolo inicial).

Uma palavra $w \in \Sigma^*$ diz-se *gerada* por uma gramática $G = (V, \Sigma, P, S)$ se existe uma sequência finita $w_1, \ldots, w_n$ de palavras em $(\Sigma \cup V)^*$ tal que $w_1 = S$, $w_n = w$ e, para cada $1 < i \leq n$, a palavra w_i obtém-se a partir w_{i-1} por aplicação de uma regra de substituição (w_i obtém-se a partir w_{i-1} por aplicação de uma regra de substituição $\alpha \to \beta$ se α é uma subpalavra de w_{i-1}, e w_i se obtém de w_{i-1} substituindo uma ocorrência de α em w_{i-1} por β). A *linguagem gerada* por G é o conjunto das palavras $w \in \Sigma^*$ que são geradas por G.

(a) Uma linguagem diz-se *regular* se é gerada por uma gramática na qual todas as regras de substituição são do tipo $X \to \beta$, onde $X \in V$ e $\beta \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ ou $\beta = sY$ com $s \in \Sigma$ e $Y \in V$. Mostre que não é decidível a linguagem

$$\begin{aligned} REG_{TM} = \{<M>\colon\ & M \text{ é uma máquina de Turing} \\ & \text{e } L_M \text{ é uma linguagem regular}\} \end{aligned}$$

Sugestão: efectue uma prova por absurdo usando o facto de a linguagem A_{TM} não ser decidível, e pode assumir como provado que a linguagem $\{0^n 1^n\}$ não é regular.

(b) Uma linguagem diz-se *independente do contexto* se é gerada por uma gramática na qual todas as regras de substituição são do tipo $X \to \beta$ com $X \in V$. Mostre que não é decidível a linguagem

$$\begin{aligned} IC_{TM} = \{<M>\colon\ & M \text{ é uma máquina de Turing} \\ & \text{e } L_M \text{ é uma linguagem e indepedente do contexto}\} \end{aligned}$$

Sugestão: efectue uma prova por absurdo usando o facto de a linguagem A_{TM} não ser decidível, e pode assmir como provado que a linguagem $\{0^n 1^n 2^n\}$ não é independente do contexto.

NOTA: Após a aula prática os alunos deverão tentar resolver todos os exercícios que não foram resolvidos na aula. Se tiverem dificuldades ou dúvidas deverão consultar os docentes da disciplina durante os respectivos horários de dúvidas.