

Instituto Superior Técnico
Teoria da Computação - LEIC 2013/2014
Aula prática 9

1 Redução

Recorde que dadas duas linguagens $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ se diz que L_1 é redutível a L_2 , o que se denota por $L_1 \leq L_2$, se existe uma função $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ total, computável, tal que $w \in L_1$ se e só se $f(w) \in L_2$.

1. Sejam $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$. Mostre que $L_1 \leq L_2$ se e só se $(\Sigma^* \setminus L_1) \leq (\Sigma^* \setminus L_2)$.
2. Sejam $L_1, L_2, L_3 \subseteq \Sigma^*$. Mostre que se $L_1 \leq L_2$ e $L_2 \leq L_3$ então $L_1 \leq L_3$.
3. Sejam $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ tais que $L_1 \leq L_2$. Mostre que
 - (a) se L_2 é decidível então L_1 é decidível.
 - (b) se L_1 não é decidível então L_2 não é decidível.
4. Sejam $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ tais que $L_1 \leq L_2$. Mostre que
 - (a) se L_2 é semidecidível então L_1 é semidecidível.
 - (b) se L_1 não é semidecidível então L_2 não é semidecidível.
5. Mostre que $L \subseteq \{0, 1\}^*$ é decidível se e só se $L \leq \{0^n 1^n : \text{com } n \in \mathbb{N}_0\}$.
6. Recorde as linguagens

$A_{TM} = \{ \langle M, w \rangle : M \text{ é uma máquina de Turing que aceita } w \}$

e

$HALT_{TM} = \{ \langle M, w \rangle : M \text{ é uma máquina de Turing} \\ \text{que aceita ou rejeita } w \}$

- (a) Mostre que $A_{TM} \leq HALT_{TM}$.
Sugestão: Considere $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ dada por

$$f(\alpha) = \begin{cases} \varepsilon & \text{se } \alpha \text{ não é uma codificação } \langle M, w \rangle \\ \langle M', w \rangle & \text{se } \alpha = \langle M, w \rangle \end{cases}$$

onde M' é uma máquina que, dado o *input* x , simula o comportamento de M com *input* x , e chega a uma configuração de aceitação se M chega a uma configuração de aceitação, e tem uma evolução infinita caso contrário.

- (b) Use a alínea anterior para demonstrar que $HALT_{TM}$ não é decidível.
7. Mostre que $L \subseteq \{0, 1\}^*$ é semidecidível se e só se $L \leq A_{TM}$.

8. Mostre que $A_{TM} \not\leq \overline{A_{TM}}$, onde $\overline{A_{TM}}$ é a linguagem complementar de A_{TM} .
9. Mostre que se $L \subseteq \Sigma^*$ é semidecidível e $L \leq (\Sigma^* \setminus L)$ então L é decidível.
10. Recorde a linguagem

$$EQ_{TM} = \{ \langle M_1, M_2 \rangle : L_{M_1} = L_{M_2} \}$$

e seja $\overline{EQ_{TM}}$ a linguagem complementar de EQ_{TM} .

- (a) Mostre que $A_{TM} \leq \overline{EQ_{TM}}$.

Sugestão: Considere uma máquina V que rejeita todas as palavras e $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ dada por

$$f(\alpha) = \begin{cases} \langle V, V \rangle & \text{se } \alpha \text{ não é uma codificação } \langle M, w \rangle \\ \langle V, S_{M,w} \rangle & \text{se } \alpha = \langle M, w \rangle \end{cases}$$

onde $S_{M,w}$ é uma máquina que, dado o *input* x , simula o comportamento de M com *input* w e tem comportamento igual ao de M .

- (b) Use a alínea anterior para demonstrar que EQ_{TM} não é reconhecida por nenhuma máquina de Turing.

2 Teorema de Rice

1. Use o teorema de Rice para demonstrar que as seguintes linguagens não são decidíveis
 - (a) $L = \{ \langle M \rangle : M \text{ é uma máquina de Turing e } \varepsilon \notin L_M \}$
 - (b) $L = \{ \langle M \rangle : M \text{ é uma máquina de Turing e } L_M \text{ tem pelo menos duas palavras} \}$
 - (c) $L = \{ \langle M \rangle : M \text{ é uma máquina de Turing e } L_M \text{ é decidível} \}$
 - (d) as linguagens referidas nos exercícios 3, 5, 7, 8, 9 e 10 da lista de exercícios para as aulas práticas 7 e 8.
2. Pode usar o teorema de Rice para demonstrar que as seguintes linguagens não são decidíveis? Em caso afirmativo, use-o para demonstrar que a linguagem em causa não é decidível.
 - (a) $L = \{ \langle M \rangle : M \text{ é uma máquina de Turing que escreve 111} \}$
(a expressão “ M escreve 111” significa aqui que existe pelo menos uma configuração inicial a partir da qual M chega a uma configuração de aceitação na qual o conteúdo da fita é 111).
 - (b) $L = \{ \langle M \rangle : M \text{ é uma máquina de Turing e } M \text{ aceita 111} \}$
 - (c) $L = \{ \langle M \rangle : M \text{ é uma máquina de Turing e } M \text{ tem mais que 10 estados} \}$

- (d) $L = \{ \langle M \rangle : M \text{ é uma máquina de Turing e } L_M \text{ é semidecidível} \}$
- (e) $L = \{ \langle M \rangle : M \text{ é uma máquina de Turing e } M \text{ nunca atinge uma configuração de rejeição} \}$
- (f) $L = \{ \langle M \rangle : M \text{ é um classificador} \}$
- (g) $L = \{ \langle M \rangle : M \text{ é uma máquina de Turing e quer } L_M \text{ quer a linguagem complementar de } L_M \text{ são linguagens infinitas} \}$

NOTA: Após a aula prática os alunos deverão tentar resolver todos os exercícios que não foram resolvidos na aula. Se tiverem dificuldades ou dúvidas deverão consultar os docentes da disciplina durante os respectivos horários de dúvidas.