Instituto Superior Técnico
Teoria da Computação - LEIC 2013/2014
Aula prática 10

1 Comportamento assimptótico de funções

1. Mostre que
   (a) $n + 5 \in O(n)$ e $n + 5 \in O(n^2)$.
   (b) $n + 5 \in \Theta(n)$ mas $n + 5 \notin \Theta(n^2)$.

2. Seja $p : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ tal que $p(n)$ é um polinómio de grau k. Mostre que $p(n) \in O(n^{k'})$ qualquer que seja $k' \geq k$.

3. Sejam $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$.
   (a) Mostre que se $\lim \dfrac{f(n)}{g(n)} = r \in \mathbb{R}_0^+$ então $f \in O(g)$.
   (b) Mostre que se $\lim \dfrac{f(n)}{g(n)} = r \in \mathbb{R}^+$ então $f \in \Theta(g)$.

4. Mostre que
   (a) $2^{n+3} \in O(2^n)$.
   (b) $2^{n+3} \in \Theta(2^n)$.
   (c) $n! \in O(n^n)$.
   (d) $\log(n^2 + 1) \in O(\log n)$.
   (e) $\log(n^2 + 1) \in \Theta(\log n)$.
   (f) $\log(n!) \in O(n \log(n))$.

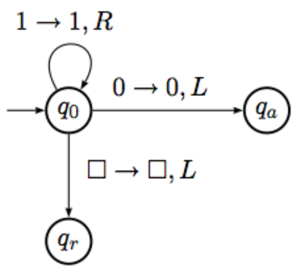
5. Sejam $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+$ e $h : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$. Mostre que se $f \in O(n^{k_1})$, $g \in O(n^{k_2})$ e $h \in O(n^{k_3})$ então
   (a) $f + g \in O(n^{\max\{k_1,k_2\}})$.
   (b) $f \times g \in O(n^{k_1+k_2})$.
   (c) $f \circ h \in O(n^{k_1 \times k_2})$.

6. Sejam $f, g, h, f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$, e $max(\{g_1, g_2\})$ a função que a cada $n \in \mathbb{N}_0$ faz corresponder $max(\{g_1(n), g_2(n)\})$. Mostre que
   (a) se $f \in O(g)$ e $g \in O(h)$ então $f \in O(h)$.
   (b) se $f_1 \in O(g_1)$ e $f_2 \in O(g_2)$ então $f_1 + f_2 \in O(max(\{g_1, g_2\}))$.
   (c) se $f_1 \in O(g)$ e $f_2 \in O(g)$ então $f_1 + f_2 \in O(g)$.
   (d) se $f_1 \in O(g_1)$ e $f_2 \in O(g_2)$ então $f_1 \times f_2 \in O(g_1 \times g_2)$.

7. Sejam $f, g, h, : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$. Mostre que
   (a) $f \in \Theta(g)$ sse $g \in \Theta(f)$.
   (b) se $f \in \Theta(g)$ e $g \in \Theta(h)$ então $f \in \Theta(h)$.

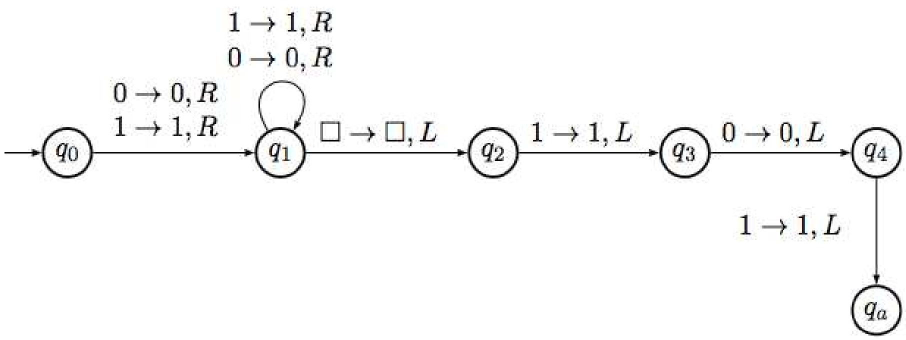
2 Tempo e espaço de máquina de Turing

1. Considere a seguinte máquina de Turing M com alfabeto $\{0, 1\}$ que decide a linguagem $L = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ tem pelo menos um } 0\}$:



   (a) Calcule o tempo (ou complexidade temporal) t_M de M e caracterize o comportamento assimptótico de t_M indicando uma função g tal que $t_M \in O(g)$.
   (b) Calcule o espaço (ou complexidade espacial) s_M de M e caracterize o comportamento assimptótico de s_M indicando uma função g tal que $s_M \in O(g)$.
   (c) Tendo em conta as alíneas anteriores indique classes de linguagens $TIME(t(n))$ e $SPACE(s(n))$ apropriadas tais que $L \in TIME(t(n))$ e $L \in SPACE(s(n))$. Verifica-se $L \in P$? E $L \in PSPACE$?

2. Considere a seguinte máquina de Turing M com alfabeto $\{0, 1\}$ que decide a linguagem $L = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ termina em } 101\}$:

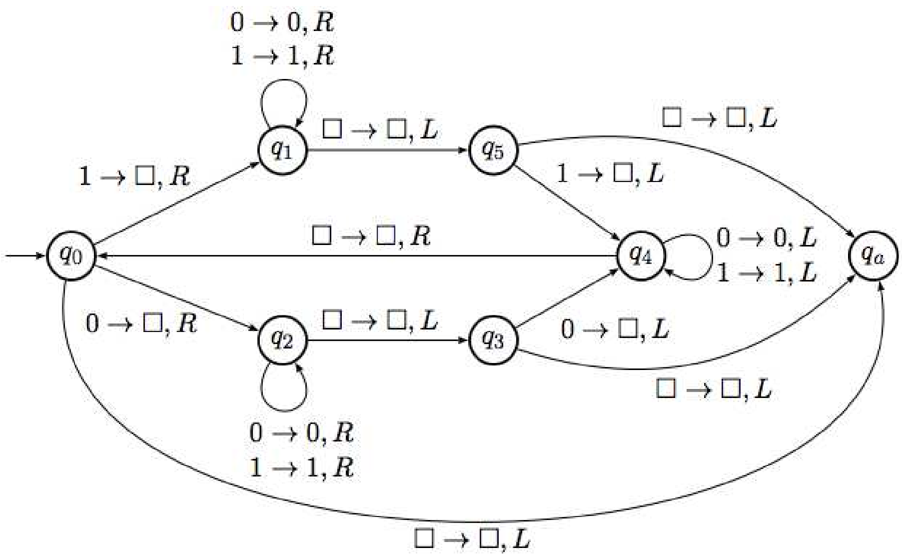


   (a) Calcule o tempo (ou complexidade temporal) t_M de M e caracterize o comportamento assimptótico de t_M indicando uma função g tal que $t_M \in O(g)$.

(b) Calcule o espaço (ou complexidade espacial) s_M de M e caracterize o comportamento assimptótico de s_M indicando uma função g tal que $s_M \in O(g)$.

(c) Tendo em conta as alíneas anteriores indique classes de linguagens $TIME(t(n))$ e $SPACE(s(n))$ apropriadas tais que $L \in TIME(t(n))$ e $L \in SPACE(s(n))$. Verifica-se $L \in P$? E $L \in PSPACE$?

3. Considere a seguinte máquina de Turing M com alfabeto $\{0, 1\}$ que decide a linguagem L dos palíndromos em $\{0, 1\}^*$.

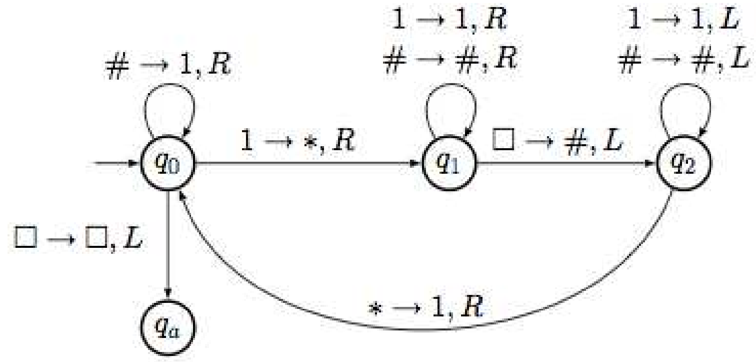


(a) Caracterize o comportamento assimptótico do tempo (ou complexidade temporal) t_M de M indicando uma função g tal que $t_M \in O(g)$.

(b) Caracterize o comportamento assimptótico do espaço (ou complexidade espacila) s_M de M indicando uma função g tal que $s_M \in O(g)$.

(c) Tendo em conta as alíneas anteriores indique classes de linguagens $TIME(t(n))$ e $SPACE(s(n))$ apropriadas tais que $L \in TIME(t(n))$ e $L \in SPACE(s(n))$. Verifica-se $L \in P$? E $L \in PSPACE$?

4. Considere a seguinte máquina de Turing M que calcula a função *dobro*, isto é, a função que a cada número natural em notação unária (n é representado por 1^n) faz corresponder o seu dobro:



Mostre que a função *dobro* pertence a PF e a $PSPACEF$.

NOTA: Após a aula prática os alunos deverão tentar resolver todos os exercícios que não foram resolvidos na aula. Se tiverem dificuldades ou dúvidas deverão consultar os docentes da disciplina durante os respectivos horários de dúvidas.