Instituto Superior Técnico
Teoria da Computação - LEIC 2013/2014
Aulas práticas 11 e 12

1 Classes de complexidade

1. Mostre que
   (a) $P \subseteq PSPACE$.
   (b) $PSPACE \subseteq EXPTIME$.
   (c) $P \subseteq NP \subseteq PSPACE = NPSPACE \subseteq EXPTIME$
   (recorde que o teorema de Savitch estabelece que se $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+$ e $f(n) \geq n$ então $NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f(n)^2)$).

2. Seja $f : \mathbb{N}_0 \to [1, +\infty[$. Mostre que $TIME(f) \subseteq SPACE(f)$.

3. Mostre que a classe P é fechada para as seguintes operações sobre linguagens:

   (a) intersecção (b) reunião (c) complementação (d) diferença

   Uma classe $\mathcal{C}$ de linguagens diz-se *fechada para a intersecção* se dadas duas linguagens $L_1, L_2 \in \mathcal{C}$ se tem que $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{C}$. A noção de classe fechada para a reunião, diferença e para a complementação é naturalmente semelhante.

4. Mostre que a classe $PSPACE$ é fechada para as seguintes operações sobre linguagens:

   (a) intersecção (b) reunião (c) complementação (d) diferença

5. Seja $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ uma função em PF total. Seja x um elemento do contradomíno de f. Demonstre que a linguagem $A = \{y \in \Sigma^* : f(y) = x\}$ pertence à classe P.

6. Mostre que a linguagem $L = \{<N, w>: N$ é uma máquina de Turing que aceita w em, no máximo, $2^{|w|}$ transições$\}$ não está em P.

   Sugestão: Realize uma demonstração por contradição. Comece por concluir que se $L \in P$ então $L' \in P$ onde $L' = \{<N>: N$ é uma máquina de Turing que não aceita $<N>$ em, no máximo, $2^{|<N>|}$ transições$\}$. Considere depois um classificador C' para L' com tempo polinomial, e conclua que se obtém uma contradição quando se analisa a evolução de C' com *input* $<C'>$.

2 Redução

1. Sejam L_1 e L_2 linguagens sobre um alfabeto Σ, e seja $\overline{L_1} = \Sigma^* \backslash L_1$ e $\overline{L_2} = \Sigma^* \backslash L_2$. Mostre que se $L_1 \leq_p L_2$ então $\overline{L_1} \leq_p \overline{L_2}$.
2. Sejam L_1, L_2 e L_3 linguagens sobre um alfabeto Σ. Mostre que se $L_1 \leq_p L_2$ e $L_2 \leq_p L_3$ então $L_1 \leq_p L_3$.
3. Sejam A e B linguagens sobre um alfabeto Σ.
   (a) Mostre que se $A \leq_p B$ e $B \in P$ então $A \in P$.
   (b) Mostre que se $A \leq_p B$ e $A \notin P$ então $B \notin P$
   (c) Repita as alíneas 3a e 3b mas agora para a classe $PSPACE$. .
   (d) Repita as alíneas 3a e 3b mas agora para a classe NP.
4. Sendo $\mathcal{C}$ uma classe de linguagens e L uma linguagem. Mostre que
   (a) se L é uma linguagem $\mathcal{C}$-*difícil* e $L \in P$ então todas as linguagens da classe $\mathcal{C}$ pertencem a P.
   (b) se L é uma linguagem $\mathcal{C}$-*difícil* e $L \in PSPACE$ então todas as linguagens da classe $\mathcal{C}$ pertencem a $PSPACE$.
5. Sendo $\mathcal{C}$ uma classe de linguagens e L uma linguagem. Mostre que
   (a) se L é uma linguagem $\mathcal{C}$-*difícil* e $L \leq_p A$ para alguma linguagem A então A é também $\mathcal{C}$-difícil.
   (b) se L é uma linguagem $\mathcal{C}$-*completa*, $A \in \mathcal{C}$ e $L \leq_p A$ então A é também $\mathcal{C}$-completa.
6. Seja $\mathcal{C}$ uma classe de linguagens fechada para a complementação, isto é, se $A \in \mathcal{C}$ então $\Sigma^* \backslash A \in \mathcal{C}$. Mostre que se L é $\mathcal{C}$-difícil então $\Sigma^* \backslash L$ é $\mathcal{C}$-difícil.

NOTA: Após a aula prática os alunos deverão tentar resolver todos os exercícios que não foram resolvidos na aula. Se tiverem dificuldades ou dúvidas deverão consultar os docentes da disciplina durante os respectivos horários de dúvidas.