1 NÚMEROS REAIS E SUCESSÕES

1.1 Propriedades algébricas

1. Simplifique as seguintes expressões (definidas nos respectivos domínios):

   a) $\frac{\frac{x}{2}}{\frac{2}{x}}$,
   b) $\frac{x+1}{\frac{1}{x}+1}$,
   c) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x^2+x}$,
   d) $\sqrt{x^2}$,
   e) $\left(\sqrt{x}\right)^2$,
   f) $4^x \frac{4}{2^x}$,
   g) $2^{x^2} (2^x)^2$,
   h) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$,
   i) $\sqrt{x-2}\,\sqrt{x+2}$,
   j) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$,
   k) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x^2)$,
   l) $\ln(2x^2 + 2x^{-2}) + \ln\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^{-2}}{2}\right)$.

2. Escreva as expressões seguintes sem usar módulos:

   (a) $x + |x-1|$,
   (b) $|x^2 - 4|$,
   (c) $|2x + |x-3| + |3-x||$.

3. Resolva as seguintes equações e inequações:

   a) $(x^2 - 3x + 2)(x-1) \geq 0$,
   b) $x \leq 2 - x^2$,
   c) $x^2 \leq 2 - x^4$,
   d) $x^3 + x \leq 2x^2$,
   e) $\sqrt[3]{x^2 + 2x} = 2$,
   f) $\sqrt[3]{x-1} = \sqrt{x-1}$,
   g) $\frac{x-1}{x^2-1} \leq 1$,
   h) $x = \frac{1}{x}$,
   i) $x < \frac{1}{x}$,
   j) $x < |x|$,

k) $|x| \geq \frac{x}{2} + 1$,

l) $|x| \leq |x-2|$,

m) $|x^2 - 2| \leq 2$,

n) $\frac{x^4-16}{|x-1|} \leq 0$,

o) $e^{x^3} < 1$,

p) $e^{-2x} - 2e^{-x} \leq -1$,

q) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$,

r) $\ln(x^2 - 3) \geq 0$.

4. Escreva cada um dos seguintes conjuntos como intervalos ou reuniões de intervalos:

a) $\left\{x : \frac{x-1}{x+1} \leq 1\right\}$,

b) $\left\{x : \frac{x^4-1}{x^3} \leq x\right\}$,

c) $\{x : |3x-4| \geq x^2\}$,

d) $\{x : |x-1|(x^2-4) \geq 0\}$,

e) $\{x : (|x|-1)(x^2-4) \leq 0\}$,

f) $\{x : |x^2-1| \leq |x+1|\}$,

g) $\{x : x^2 - |x| - 2 \leq 0\}$,

h) $\left\{x : \frac{x}{|x|-1} \geq 0\right\}$,

i) $\left\{x : \frac{x^2-|x|}{x-3} \leq 0\right\}$,

5. Prove que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$,

(a) Desigualdade Triangular: $|x+y| \leq |x| + |y|$

(b) $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.

6. (a) Escreva com quantificadores:

i. Para qualquer $a \in \mathbb{R}$, a equação $a + x^2 = 0$ tem solução.

ii. Existe um número real maior do que todos os outros.

iii. Se a distância de x a 1 é maior do que 1 então a distância de x a 0 é maior do que 2.

iv. Para $x, y \in \mathbb{R}$, com $y \neq 0$, $\dfrac{x}{y} > 1$ se, e só se, $x > y$.

(b) As afirmações são verdadeiras?

(c) Escreva a negação das afirmações acima (com e sem quantificadores).

7. Indique justificando quais das proposições seguintes são verdadeiras:

a) $\{1\} \subset \{1, \{2,3\}\}$

b) $\{1\} \in \{1, \{2,3\}\}$

c) $2 \in \{1, \{2,3\}\}$

d) $1 \in \{\mathbb{R}\}$

e) $\emptyset = \{x \in \mathbb{N} : x = x+1\}$

f) $\emptyset \in \{0\}$

g) $\emptyset \subset \{0\}$

h) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, x > 0 \;\Leftrightarrow\; x^{-1} > 0$

i) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, x > 1 \;\Leftrightarrow\; x^{-1} < 1$

j) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\, x < y \;\Rightarrow\; y^{-1} < x^{-1}$

k) $\forall_{x\neq 0}\, x^2 > 0$

l) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\, x < y \;\Rightarrow\; x^2 < y^2$

m) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\, x < y < 0 \;\Rightarrow\; x^2 > y^2$

n) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, \sqrt{x^2} = x$.

8. Indique o maior $\varepsilon > 0$ tal que A contem uma vizinhança-ε de x_0:

   (a) $A = [0,1]$, $x_0 = \frac{1}{2}$;

   (b) $A = [0,1]$, $x_0 = \frac{1}{3}$;

   (c) $A = [-20, +\infty[$, $x_0 = 20$;

   (d) $A = [-2,3] \cup]4, +\infty[$, $x_0 = \frac{2}{3}$.

1.2 Método de Indução Matemática

1. (Ex. 1.17, 1.18 e 1.19 de [2]) Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.[1]

   b) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$.

   c) $(n!)^2 > 2^n n^2$, para todo o natural $n \geq 4$.

   d) $n! \geq 2^{n-1}$, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$.

2. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   c) Para $a \in \mathbb{R}$, $(a-1)(1 + a + \cdots + a^n) = a^{n+1} - 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.

   d) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   f) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

3. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $(n+2)! \geq 2^{2n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   b) $2n - 3 < 2^{n-2}$, para todo o natural $n \geq 5$.

   c) $7^n - 1$ é múltiplo[2] de 6 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   d) $2^{2n} + 2$ é múltiplo de 3 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

4. Seja $P(n)$ a condição "$n^2 + 3n + 1$ é par".

   a) Mostre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

   b) Pode concluir que $n^2 + 3n + 1$ é par, para qualquer $n \in \mathbb{N}$?

   c) Mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 3n + 1$ é ímpar.

[1] Esta expressão pode ser escrita na forma de somatório como $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$. Ver exercicios seguintes.

[2] Um número é múltiplo de 6 sse é da forma $6k$, para algum $k \in \mathbb{N}$.

5. Prove por indução matemática que para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $a_1, \cdots a_n \in \mathbb{R}$,

$$|a_1 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + \cdots + |a_n|.$$

(Sugestão: use a Desigualdade Triangular $|a + b| \leq |a| + |b|$.)

6. Demonstre a desigualdade de Bernoulli:

Sendo $a > -1$ *e* $n \in \mathbb{N}_0$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Símbolo de Somatório, definições por recorrência

Dado $n \in \mathbb{N}$ e uma sequência de números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, o símbolo de somatório $\sum_{k=1}^n a_k$ define-se por recorrência da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \text{ se } n = 1\,, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) + a_n \text{ se } n > 1\,.$$

Resolva os exercícios seguintes com base nesta definição.

7. Determine os valores numéricos das seguintes somas:

$$\text{(a) } \sum_{i=1}^{8}(2i-3)\,; \quad \text{(b) } \sum_{k=1}^{7}(k-4)^2\,; \quad \text{(c) } \sum_{j=1}^{4} j(j+1)(j+2)\,; \quad \text{(d) } \sum_{i=1}^{4} 6\,;$$

$$\text{(e) } \sum_{j=1}^{3} j^{2j}\,; \quad \text{(f) } \sum_{k=1}^{7}(-1)^k(2k-3)\,; \quad \text{(g) } \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n(n+1)}\,.$$

8. Demonstre as seguintes propriedades do somatório:

   (a) $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$ (propriedade aditiva);

   (b) $\sum_{k=1}^n (c\, a_k) = c \sum_{k=1}^n a_k$ para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$ (homogeneidade);

   (c) $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$ (propriedade telescópica).

   (d) $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=p+1}^{p+n} a_{k-p}$ para qualquer $p \in \mathbb{N}$.

9. Utilizando os resultados do Exercício 1 e 2 e as propriedades anteriores do somatório, calcule:

$$\text{(a) } \sum_{k=1}^{18}(k+1)\,; \quad \text{(b) } \sum_{k=1}^{20}(2k-1)^2\,; \quad \text{(c) } \sum_{k=1}^{15}(k-3)^3\,;$$

$$\text{(d) } \sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)\,; \quad \text{(e) } \sum_{k=1}^{20}\left(3^k - 3^{k+2}\right)\,.$$

10. Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

pelos seguintes dois métodos distintos:

   (a) usando indução.

   (b) observando que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ e usando as propriedades do somatório.

11. Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer números reais $a, b \in \mathbb{R}$ é válida a igualdade

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1} .$$

12. Mostre que para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

pelos seguintes dois métodos distintos:

   (a) usando indução.

   (b) aplicando as propriedades do Exercício 8 a $(1-r)\sum_{k=0}^{n} r^k$.

A que é igual a soma quando $r = 1$? [3]

13. O símbolo $n!$, designado por n-**factorial**, define-se por recorrência da seguinte forma:

$$0! = 1 \qquad \text{e} \qquad n! = n \cdot (n-1)!\,, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N}\,.$$

Observe que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$. Dados inteiros $0 \leq k \leq n$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ (às vezes também representado por C_k^n) é definido por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

   (a) Mostre que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{e} \qquad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

   Esta última fórmula é a chamada **lei do triângulo de Pascal**, permitindo o cálculo rápido dos sucessivos coeficientes binomiais.

[3] Por definição, $r^0 = 1$.

(b) Prove por indução a **fórmula do desenvolvimento do binómio de Newton**:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\,, \text{ para quaisquer } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

(c) Use a fórmula anterior para estabelecer as igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0\,, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

14. Seja $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(0) = 1$ e $f(n+1) = (2n+2)(2n+1)f(n)$. Mostre por indução matemática que, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$,

$$f(n) = (2n)!$$

15. Use indução matemática para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}\,.$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(3k-1) = n^2(n+1)\,.$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)(k+2) = \frac{(n-1)n(n+4)}{3}\,.$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)2^k = n2^{n+1}\,.$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}\,.$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{5-2k}{3^k} = 1 + \frac{n-1}{3^n}\,.$

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+2)2^k = (n^2+1)2^{n+1} - 2\,.$

h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-2)^2}{2^k} = 2 - \frac{n^2+2}{2^n}\,.$

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-2)3^{k-1}}{(k+1)!} = 1 - \frac{3^n}{(n+1)!}\,.$

1.3 Axioma do Supremo

1. Verifique que se $n \in \mathbb{N}$ é ímpar, então n^2 é também ímpar. O que pode concluir de $n \in \mathbb{N}$ sabendo que n^2 é par?

2. Verifique que se x, y são números racionais, então $x+y$, xy, $-x$, x^{-1} (para $x \neq 0$) são também números racionais.[4]

[4] Ou seja, $\mathbb{Q}$ é fechado para a adição e multiplicação e contem os simétricos e inversos de todos os seus elementos. Mostra-se assim, uma vez que também os elementos neutros 0 e 1 são racionais, que $\mathbb{Q}$ é um corpo. É fácil ver que também verifica as propriedades de ordem, ou seja, $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.

3. (Ex. I.3 de [1]) Verifique que, se x é um número racional diferente de zero e y um número irracional, então $x+y$, $x-y$, xy e y/x são irracionais; mostre também que, sendo x e y irracionais, a sua soma, diferença, produto e quociente podem ser ou não ser irracionais.

4. (Ex. 1.2 de [2]) Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \frac{x}{2} + 2\right\}, \qquad B = [-3, 4], \qquad C = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

   a) Mostre que $A \cap B = \left[-3, -\frac{4}{3}\right] \cup \{4\}$.

   b) Indique, se existirem em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\min(A \cap B)$, $\max(A \cap B)$, $\inf(A \cap B \cap C)$, $\sup(A \cap B \cap C)$ e $\min(A \cap B \cap C)$.

5. (Exame de 19/1/2000) Considere os conjuntos A e B definidos por

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \frac{x-1}{x \ln x} > 0\right\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x = -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

   Mostre que o conjunto A é igual a $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Determine, caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos conjuntos A e $A \cup B$.

6. (Ex. 1.8 de [2]) Considere os conjuntos

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\ln x} \geq 1\right\}, \qquad B = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

   Para cada um dos conjuntos A e B, indique o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, no caso de existirem (em $\mathbb{R}$), o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo.

7. Sejam A, B e C os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2|x| > 3\right\}, \qquad B = \left]0, \sqrt{2}\right],$$
$$C = \left\{\sqrt{2} - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

   a) Calcule A sob a forma de uma reunião de intervalos.

   b) Indique, caso exista, $\inf A$, $\min A \cap B$, $\max A \cap B$, $\max A \cap B \cap \mathbb{Q}$, $\inf A \cap B \cap \mathbb{Q}$, $\max C$, $\max B \setminus C$.

8. (Exame de 2000) Sejam A e B os subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos por

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq x^2 - 1\}, \qquad B = [-2, 2].$$

a) Determine A sob a forma de reunião de intervalos.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, o máximo e o mínimo de $A \cap B$ e o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de $(A \cap B) \setminus \mathbb{Q}$.

9. (Exame de 30/11/2002) Considere os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x : |x^2 - 2| \leq 2x + 1\right\}, \qquad B = \mathbb{Q}, \qquad C = \left\{\frac{1}{k^2} : k \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

a) Mostre que $A = \left[-1 + \sqrt{2}, 3\right]$.

b) Determine, se existirem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de $A \cap B$, C.

10. (Exame de 16/1/2004) Considere os seguintes conjuntos de números reais:

$$A = \left\{x : \frac{x^2 - 1}{x} \geq |x - 1|\right\}, \qquad B = \{x : \operatorname{sen} x = 0\}, \qquad C = \mathbb{Q}.$$

a) Mostre que $A = \left[-\frac{1}{2}, 0\right[\cup [1, +\infty[$.

b) Escreva os conjuntos dos majorantes e minorantes de $A \cap C$ e $B \cap C$. Calcule ou conclua da não existência de $\sup A$, $\inf A \cap C$, $\min A \cap C$, $\min B$, $\sup B \cap C$.

11. (Teste de 12/11/2005) Considere os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x : x \geq 0 \ \wedge \ \frac{x^4 - 4}{|x - 1|} \leq 0\right\}, \qquad B = \{x : x \geq 0 \ \wedge \ \exists_{k \in \mathbb{N}}\, kx \notin \mathbb{Q}\}.$$

a) Mostre que $A = \left[0, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}$ e justifique que $B = [0, +\infty[\setminus \mathbb{Q}$.

b) Determine, ou mostre que não existem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de cada um dos conjuntos A e $A \setminus B$.

12. (Teste de 29/4/2006) Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x : \frac{x^2 - 2}{|x| - 1} \leq 0\right\}, \quad B = \{2^{n/2} : n \in \mathbb{N}\}.$$

a) Mostre que $A = \left[-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right]$.

b) Determine ou justifique que não existem, os supremo, máximo, ínfimo e mínimo de cada um dos conjuntos $A \cap \mathbb{Q}$, B e $B \cap \mathbb{Q}$.

13. Para $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, definimos $-A = \{-x : x \in A\}$. Justifique que A é minorado se e só se $-A$ é majorado e nesse caso temos $\inf A = -\sup(-A)$.

14. $\star$ Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $s = \sup A$. Se existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $(V_{\varepsilon_0}(s) \setminus \{s\}) \cap A = \emptyset$, então A tem máximo.

15. ⋆ (Ex. 1.10 de [2]) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, majorado e não vazio, e seja m um majorante de A, distinto do supremo desse conjunto. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(m) \cap A = \emptyset$.

16. ⋆ (Ex. I.5 de [1]) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $A \subset B$ e suponha que A é não vazio e B é majorado. Justifique que existem os supremos de A e B e prove que se verifica $\sup A \leq \sup B$.

17. ⋆ (Ex. 1.12 de [2]) Sendo U e V dois subconjuntos majorados e não vazios de $\mathbb{R}$, tais que $\sup U < \sup V$, justifique (de forma precisa e abreviada) as afirmações seguintes:

    a) Se $x \in U$, então $x < \sup V$.

    b) Existe pelo menos um $y \in V$ tal que $y > \sup U$.

18. ⋆ (Ex. 1.14 de [2]) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$.

    a) Prove que, se $\sup A < \inf B$, A e B são disjuntos.

    b) Mostre, por meio de exemplos, que se for $\sup A > \inf B \ \wedge \ \sup B > \inf A$, A e B podem ser ou não disjuntos.

1.4 Sucessões

1. Indique quais são limitadas/majoradas/minoradas e monótonas (crescentes ou decrescentes) de entre as sucessões definidas do modo seguinte, $n \in \mathbb{N}$:

    a) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$.

    b) $u_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$.

    c) $u_n = (-1)^n n^2$.

    d) $u_n = n^{(-1)^n}$.

    e) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$. [5]

    f) $u_1 = -1$, $u_{n+1} = -2u_n$.

    g) $u_1 = 0$, $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{3}$.

2. Considere as sucessões reais (u_n) e (v_n) definidas por recorrência por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 + 1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 3, \\ v_{n+1} = \frac{3v_n}{(n+1)^2} \, . \end{cases}$$

Mostre, usando indução matemática, que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

[5] Pode ser útil usar o Ex. 1.2.12.

(a) $u_n = \sqrt{2^n - 1}$,

(b) $v_n = \dfrac{3^n}{(n!)^2}$.

3. Considere as sucessões definidas da seguinte forma, com $a, r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u_1 = a, \\ u_{n+1} = r + u_n, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = a, \\ v_{n+1} = rv_n. \end{cases}$$

(A sucessão (u_n) é uma *progressão aritmética* de primeiro termo a e razão r e a sucessão (v_n) é uma *progressão geométrica* de primeiro termo a e razão r.)

a) Mostre por indução matemática que $u_n = a + (n-1)r$ e $v_n = ar^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Dê exemplos de valores de r e de a tais que (i) (u_n) seja monótona crescente; (ii) (u_n) seja monótona decrescente; (iii) (v_n) seja monótona crescente; (iv) (v_n) não seja monótona.

c) Mostre que (u_n) não é limitada, para quaisquer $a \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$. Para que valores de r e a será (v_n) limitada? E convergente?

4. Baseando-se directamente na definição de limite de sucessão mostre que:

a) $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$.

b) $\frac{n^2}{n^2+1} \to 1$.

c) $\frac{2n-1}{n+1} \to 2$.

d) $\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \to 1$.

5. A mesma questão que a anterior para:

a) $\dfrac{n+3}{n+2} \not\to \frac{3}{2}$.

b) $1 + (-1)^n \not\to 0$.

6. Baseando-se na definição de limite, mostre que se se (u_n) é uma sucessão monótona e limitada então

(a) u_n crescente: $\lim u_n = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$,

(b) u_n decrescente: $\lim u_n = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

7. (Exercício 1.45 de [2]) Justifique que, se as condições

$$u_n > 0 \quad \text{e} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

são verificadas qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, então u_n é convergente.

8. (Exercício 1.47 de [2]) Sendo x_n o termo geral de uma sucessão monótona, y_n o termo geral de uma sucessão limitada e supondo verificada a condição

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$$

prove que x_n é limitada e que as duas sucessões são convergentes para o mesmo limite.

9. (Exercício 1.34 de [2]) Das sucessões de termos gerais

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad v_n = \frac{n^{n+1}}{n^n + 1}, \quad w_n = u_n v_n$$

indique, justificando abreviadamente as respostas, quais as que são limitadas e as que são convergentes.

10. (Exercício 1.40 de [2]) Estude quanto à convergência as sucessões de termos gerais:

$$u_n = \cos(n!\pi), \quad v_n = \frac{n\cos(n\pi)}{2n+1}, \quad w_n = \frac{1+a^n}{1+a^{2n}} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

11. Calcule o limite (em $\mathbb{R}$) ou justifique a sua não existência para cada uma das sucessões de termo geral

a) $\frac{1}{n}\left(2 + \frac{1}{n}\right)$

b) $\frac{1}{n}\left(2n + \sqrt{n}\right)$

c) $\frac{(-1)^n}{n!}$

d) $\frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

e) $\frac{1}{(-1)^n n^2 + 2}$

f) $(1+(-1)^n)\left(1+\frac{1}{n}\right)$

g) $\frac{n(1+(-1)^n)}{2}$

h) $\frac{(-1)^n}{a^n}$, com $a > 1$

i) $\frac{\operatorname{sen}(n!)}{(2n)!}$

j) $\left(-1 - \frac{1}{n}\right)^n$

12. Calcule o limite (em $\mathbb{R}$) ou justifique a sua não existência para cada uma das sucessões de termo geral

a) $\frac{(2n+1)^3 + n}{n^3+1}$,

b) $\frac{(2n+1)^3 + n^2}{(n+1)^2(n+2)}$,

c) $\frac{(n+1)^2 + 2n^4}{(n+1)^4 + 2n^2}$,

d) $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n-1}}$,

e) $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{4n^2+1}}$,

f) $\frac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n+1}}$,

g) $\dfrac{n+1}{n!}$,

h) $\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

i) $\dfrac{1+2^{-n}+3^{-n}}{2+3^{-n}+4^{-n}}$

j) $\dfrac{n^n}{n^n+1}$,

k) $\dfrac{4^n}{1+4^{n^2}}$,

l) $\dfrac{(a^n)^2}{a^{n^2}}$, com $a > 1$,

m) $\dfrac{2n^2+(-1)^n}{n^2-1}$

n) $\dfrac{n+\cos(n)}{2n-1}$

13. (Exercício 1.36 de [2]) Indique, justificando abreviadamente a resposta, o conjunto dos valores reais de a para os quais a sucessão de termo geral $x_n = \frac{a^n}{2^{1+2n}}$ é

    a) convergente;

    b) divergente, mas limitada.

14. Mostre que se (u_n) é uma sucessão convergente tal que $u_{2n} \in]0,1[$ e $u_{2n+1} \in \mathbb{R} \setminus]0,1[$ então $\lim u_n \in \{0,1\}$.

15. Sejam A e B os conjuntos $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $B = \left\{-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_1\right\}$. Diga, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras. Para as que forem falsas forneça um contra-exemplo:

    a) Toda a sucessão de termos em A que seja limitada é convergente.

    b) Qualquer sucessão monótona de termos em $A \cap V_{1/2}(0)$ tem limite real.

    c) Qualquer sucessão de termos em $A \cup B$ que seja estritamente decrescente tem limite em $\mathbb{R}_0^+$.

16. Considere o seguintes subconjunto de $\mathbb{R}$ (Ex.1.3.9)

$$A = \left\{x \,:\, |x^2-2| \le 2x+1\right\} = \left[-1+\sqrt{2},\, 3\right],$$

    Indique, justificando, se cada uma das proposições seguintes é verdadeira ou falsa:

    (i) Toda a sucessão monótona de termos em A é convergente.

    (ii) Existem sucessões (a_n) de termos em $\mathbb{R} \setminus A$ convergentes e tais que $a_{n+1}a_n < 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Sucessões por recorrência

17. Considere a sucessão real (u_n) definida por recorrência por:

$$u_1 = 2, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$$

a) Mostre que $u_n \in \mathbb{Q}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ (Sug. Use indução).

b) Assumindo que (u_n) é convergente, mostre que $\lim u_n = \sqrt{2}$.

18. Considere a sucessão real (u_n) definida por recorrência por:

$$u_1 = a, \qquad u_{n+1} = (-1)^n u_n + \frac{u_n}{n+1},$$

com $a \in \mathbb{R}$. Mostre que se (u_n) é convergente então $\lim u_n = 0$.

19. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{2} \end{cases}.$$

a) Mostre usando indução que $u_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão crescente.

c) Mostre que (u_n) é convergente e indique $\lim u_n$.

20. Considere a sucessão real (u_n) definida por recorrência por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{4} \end{cases}.$$

a) Mostre usando indução que $u_n < \frac{3}{2}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão crescente.

c) Mostre que (u_n) é convergente e indique $\lim u_n$.

21. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2}, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2}{3} \end{cases}.$$

a) Mostre usando indução que $1 < u_n < 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão decrescente.

c) Mostre que (u_n) é convergente e indique $\lim u_n$.

22. Seja $u_1 > 1$ e $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ para $n \in \mathbb{N}_1$. Mostre que u_n é convergente e calcule $\lim u_n$.

(Sugestão: começe por provar por indução matemática que $1 < u_n < 2$, para todo o inteiro $n \geq 2$.)

23. (Exercício II.1g) de [1]) Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência por $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

    a) Prove por indução que $1 \leq u_n < 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

    b) Prove por indução que (u_n) é crescente.
    (Alternativamente, verifique que $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+\sqrt{2+u_n}}$.)

    c) Justifique que (u_n) é convergente.

    d) Aplicando limites a ambos os membros da expressão de recorrência, determine o limite de (u_n).

24. (Exercício 8.13 de [1]) Seja (a_n) a sucessão definida por recorrência por $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \dfrac{3(1 + a_n)}{3 + a_n}$.

    a) Verifique que $a_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{(3-\sqrt{3})(a_n-\sqrt{3})}{3+a_n}$ e prove por indução que $a_n > \sqrt{3}$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

    b) Prove que (a_n) é decrescente.

    c) Justifique que (a_n) é convergente.

    d) Aplicando limites a ambos os membros da expressão de recorrência, determine o limite de (a_n).

Limite em $\overline{\mathbb{R}}$

25. Prove, recorrendo à definição de limite em $\overline{\mathbb{R}}$ que

    a) $1 - \sqrt{n} \to -\infty$.

    b) $\dfrac{n^2 + 1}{n} \to +\infty$.

26. a) Mostre que:

        i) se $u_n \to +\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$ então $\frac{1}{u_n} \to 0$,

        ii) se $u_n > 0$ e $u_n \to 0$ então $\frac{1}{u_n} \to +\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$.

    b) Será verdade que $u_n \to 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{u_n} \to +\infty \vee \frac{1}{u_n} \to -\infty\right)$?

27. Determine, se existirem, os limites em $\overline{\mathbb{R}}$ das sucessões que têm por termo de ordem n:

    a) $\dfrac{n^n}{1000^n}$,

    b) $\dfrac{(2n)!}{n!}$

    c) $n^{n+1} - n^n$

    d) $3^n - (2n)!$

    e) $(n! - n^{1000})^n$

f) $\sqrt[n]{\dfrac{n+2}{n+1}}$

g) $\dfrac{n^{1000}}{1.0001^n}$

h) $\sqrt[n]{\dfrac{n}{n^2+1}}$

i) $\sqrt[n]{3^n+2}$

j) $\sqrt[n]{n!}$,

k) $\left(2-\dfrac{1}{n}\right)^n$

l) $\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^n}$

m) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

28. (Exercício II.5 de [1]) Determine, se existirem, os limites em $\overline{\mathbb{R}}$ das sucessões que têm por termo de ordem n:

a) $\dfrac{2n+3}{3n-1}$,

b) $\dfrac{n^2-1}{n^4+3}$,

c) $\dfrac{2^n+1}{2^{n+1}-1}$,

d) $\dfrac{n^3+1}{n^2+2n-1}$,

e) $\dfrac{(-1)^n n^3+1}{n^2+2}$,

f) $\dfrac{n^p}{n!}$ $(p \in \mathbb{N})$,

g) $\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{n}}$,

h) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^3}$,

i) $\dfrac{3^n}{n^2}$,

j) $\sqrt[n]{\dfrac{n^2+n-1}{n+3}}$,

k) $\sqrt[n]{2^n+1}$,

l) $\sqrt[n]{(n+1)!-n!}$,

m) $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^3}$,

n) $\left(1-\dfrac{1}{n!}\right)^{n!}$,

o) $\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{n^2}$.

29. Decida sobre a existência dos seguintes limites em $\mathbb{R}$ e $\overline{\mathbb{R}}$, calculando os seus valores nos casos de existência:

a) $\lim \dfrac{n!}{n^{1000}}$,

b) $\lim \dfrac{(2n)!+2}{(3n)!+3}$,

c) $\lim \dfrac{(2n)!}{(2n)^n}$,

d) $\lim \dfrac{(n!)^2}{(2n)!+2}$,

e) $\lim \dfrac{2^n n!}{n^n}$,

f) $\lim \dfrac{3^n n!}{n^n}$,

g) $\lim n^{\frac{1}{n}}$,

h) $\lim \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$,

i) $\lim \left(\dfrac{1}{n}\right)^n$,

j) $\lim \left(\dfrac{n-1}{2n^2+1}\right)^{\frac{2}{n}}$,

k) $\lim \dfrac{2^{(n^2)}}{15^n}$,

l) $\lim \sqrt[n]{3^{n+1}n^3}$.