# Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

## 14ª Aula Prática

### Soluções e algumas resoluções abreviadas

1. a) diverge, o termo geral não tende para 0;

   b) série geométrica de razão $\frac{e}{\pi^2}$, converge uma vez que $\left|\frac{e}{\pi^2}\right| < 1$, e $s = \frac{\pi^2}{\pi^2 - e}$;

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ é uma série de Mengoli da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+1}$, com $a_n = \frac{1}{n+1}$, logo converge e $s = a_1 - \lim a_n = \frac{1}{2}$;

   d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$, é uma série de Mengoli da forma $\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} a_n - a_{n+2}$, com $a_n = \frac{1}{n-1}$, logo converge com $s = \frac{1}{2}(a_2 + a_3 - 2 \lim a_n) = \frac{3}{4}$;

   e) série de Mengoli da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+1}$, com $a_n = -\sqrt{n}$, logo diverge, uma vez que $(a_n)$ diverge;

   f) série de Mengoli da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+1}$, com $a_n = \sqrt[n]{n}$, logo converge, uma vez que $(a_n)$ é convergente, com $\lim a_n = \lim \frac{n+1}{n} = 1$, e $s = 1 - 1 = 0$.

   g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \pi^{-n+2} = \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\pi}\right)^n$, série geométrica de razão $-\frac{1}{\pi}$, converge, porque $\left|-\frac{1}{\pi}\right| < 1$, e $s = \frac{\pi^2}{1-\pi}$;

   h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(-\frac{1}{4}\right)^n$, converge uma vez que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ converge, por ser uma série geométrica de razão $0 < \frac{3}{4} < 1$, e $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ também converge, por ser uma série geométrica de razão $-\frac{1}{4}$, e $\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$. A soma é $s = 3 - \frac{1}{5} = \frac{14}{5}$;

   i) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \log(n) - \log(n+1)$, série de Mengoli da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+1}$, com $a_n = \log(n)$, logo diverge, uma vez que $(a_n)$ diverge;

   j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-n+1}}{2^{-n+1}} = \frac{e}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{e}\right)^n$, série geométrica de razão $\frac{-2}{e}$, logo converge porque $\left|-\frac{2}{e}\right| < 1$, e $s = -\frac{e}{e+2}$;

   k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, série de Mengoli da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+1}$, com $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, logo converge com $s = a_1 - \lim a_n = 1$.

l) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}+1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ diverge, uma vez que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^n}$ diverge por ser uma série geométrica de razão $\frac{4}{3} > 1$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ converge por ser uma série geométrica de razão $0 < \frac{1}{3} < 1$. (Alternativamente: diverge uma vez que o seu termo geral não converge para 0.)

m) série de Mengoli da forma $\sum_{n=1} a_n - a_{n+2}$, com $a_n = \frac{1}{n!}$, logo converge com $s = a_1 + a_2 - 2\lim a_n = \frac{3}{2}$;

n) $\sum_{n=0}^{\infty}(2 + (-1)^n)2^{-n} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, converge uma vez que$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, por ser uma série geométrica de razão $0 \leq \frac{1}{2} < 1$, e $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ também converge, por ser uma série geométrica de razão $-\frac{1}{2}$, e $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$. A soma é $s = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$;

o) É uma série de Mengoli da forma $\sum_{n=1} a_{n+1} - a_n$, com $a_n = \operatorname{arctg}(n)$, logo converge uma vez uma vez que $a_n \to \frac{\pi}{2}$, e a sua soma é $s = \lim a_n - a_1 = \frac{\pi}{4}$.

2. a) Trata-se de uma série de termos não negativos. Comparemos com a série $\sum \frac{n}{\sqrt{n^3}} = \sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ a qual é divergente. Como,

$$\lim \frac{\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n^2+1}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}} = 1(\neq 0, +\infty) \qquad \text{(verifique!)}$$

concluimos que a série dada e a série $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ têm a mesma natureza. Logo a série dada é divergente.

b) Trata-se de uma série de termos positivos. Usando o critério de d'Alembert,

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+(n+1)!}}{\frac{2^n}{n^2+n!}} = \frac{2(n^2 + n!)}{(n+1)^2 + (n+1)!} = 2\frac{n!}{(n+1)!}\frac{\frac{n^2}{n!} + 1}{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!} + 1} \to 2.0.1 = 0.$$

Como este limite é menor que 1, concluimos que a série dada é absolutamente convergente.

c) Procedendo como em a) concluimos que a série tem a mesma natureza que a série $\sum \frac{1}{n^2}$. Logo, é convergente.

d) Trata-se de uma série de termos positivos. Aplicando o critério de d'Alembert,

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(2(n+1))!}}{\frac{2^n}{(2n)!}} = \frac{2^{n+1}}{2^n}\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{2}{(2n+1)(2n+2)} \to 0$$

Como este limite é inferior a 1 concluimos que a série é absolutamente convergente.

e) Como $\frac{1+2^n}{1-2^n} = \frac{2^{-n}+1}{2^{-n}-1} \to -1 \neq 0$, concluimos que a série é divergente.

f) Trata-se de uma série de termos não negativos. Tentemos aplicar o critério de Cauchy:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+\sqrt{n}}\right)^n} = \frac{n}{2n+\sqrt{n}} = \frac{1}{2+n^{-\frac{1}{2}}} \to \frac{1}{2}.$$

Como este limite é inferior a 1 concluimos que a série é absolutamente convergente.

g) Comece por reparar que, contrariamente a e), a sucessão do termo geral desta série converge para 0 o que não nos permite tirar qualquer conclusão sobre a convergência ou divergência da série. Tratando-se de uma série de termos não negativos, podemos tentar usar o critério de d'Alembert:

$$\frac{\frac{1+2^{n+2}}{1+3^{n+1}}\,\frac{1+2^{n+1}}{1+3^n}}{} = \frac{1+2^{n+2}}{1+2^{n+1}}\frac{1+3^n}{1+3^{n+1}} = \frac{2^{-(n+1)}+2}{2^{-(n+1)}+1}\frac{3^{-n}+1}{3^{-n}+3} \to \frac{2}{3}.$$

Como este limite é inferior a 1 a série é absolutamente convergente. (Alternativamente: usar o critério geral de comparação com $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$.)

h) Trata-se de uma série de termos não negativos. Tentemos aplicar o critério de Cauchy:

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}} = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \to e^2.$$

Como este limite é superior a 1 concluimos que a série é divergente.

i) Como em h), a série converge.

j) Como em a) concluimos que a série tem a mesma natureza que a série $\sum \frac{1}{n}$. Logo, é divergente.

k) Como em a) concluimos que a série tem a mesma natureza que a série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$. Logo, é divergente.

l) Trata-se de uma série de termos não negativos. Aplicando o critério de d'Alembert,

$$\lim \frac{\frac{(1000)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(1000)^n}{n!}} = \lim 1000\,\frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1000}{n+1} = 0.$$

Como este limite é inferior a 1, a série é convergente.

m) Repare-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2-3^n}$ é uma série de termos negativos. Consideramos a série $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2-3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n-n}{3^n-n^2}$, que é uma série de termos positivos. Aplicando o critério de d'Alembert,

$$\lim \frac{\frac{2^{n+1}-n-1}{3^{n+1}-(n+1)^2}}{\frac{2^n-n}{3^n-n^2}} = \frac{2}{3} < 1$$

(verifique!), logo a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n-n}{3^n-n^2}$ converge, e também converge (absolutamente) a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2-3^n}$.

n) Trata-se de uma série de termos não negativos. Tentemos aplicar o critério de Cauchy:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(\log n)^n}} = \frac{1}{\log n} \to 0 < 1.$$

Logo, a série é convergente.

o) Trata-se de uma série de termos não negativos. Comparando com a série convergente $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\frac{\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2-1}}{\frac{1}{n^2}} = \operatorname{arctg} n \, \frac{n^2}{n^2-1} \to \frac{\pi}{2} \neq 0, \infty.$$

Logo, as séries têm a mesma natureza, ou seja, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2-1}$ é convergente.

p) Temos

$$\lim n \operatorname{sen} \frac{1}{n} = \lim \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Como o termo geral não converge para 0, a série diverge.

q) Trata-se de uma série de termos não negativos. Comparando com a série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\lim \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \neq 0, \infty.$$

Do critério geral de comparação, as séries têm a mesma natureza, ou seja, convergem.

r) Trata-se de uma série de termos não negativos. Comparando com a série divergente $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\frac{\frac{1}{\log n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\log n} = +\infty.$$

Logo, $\frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$, a partir de determinada ordem, e do critério geral de comparação, a série diverge.

3. a) converge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$;
   b) diverge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$;
   c) converge - critério d'Alembert;
   d) diverge - o termo geral não tende para 0;
   e) diverge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$;
   f) converge - critério d'Alembert;
   g) converge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$;
   h) converge - critério d'Alembert;
   i) diverge - o termo geral não tende para 0;
   j) converge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n}\sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{13}{12}}}$;
   k) diverge - critério d'Alembert;
   l) converge - $\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^3}$, comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

4. a) diverge - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – série harmónica; b) diverge - o termo geral não converge para 0; c) converge - critério da raiz.

5. (a) i) Temos que $f(x) = \dfrac{1}{x\log x}$, $x \geq 2$, é uma função crescente e positiva, e que

$$\lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{1}{x\log x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} [\log|\log x|]_2^b = \lim_{b\to+\infty} \log|\log b| - \log|\log 2| = +\infty.$$

Logo, do critério do integral, a série $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ diverge.

ii) Como em i) (neste caso, a série converge).

iii) Temos $\frac{1}{n^2\log n} \leq \frac{1}{n^2}$. Logo, como $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, do critério geral de comparação, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2\log n}$ também converge.

iv) Temos

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n}\log n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\log n} = +\infty.$$

Logo, $\frac{1}{\sqrt{n}\log n} > \frac{1}{n}$, a partir de determinada ordem, e do critério geral de comparação, a série diverge.

6. (a) Para $a_n \geq 0$, as séries $\sum a_n$ e $\sum f(a_n)$ são de termos não negativos, já que se $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = L > 0$, então $f(x) > 0$ em $]0, a[$ para algum $a > 0$, logo $f(a_n) > 0$. Como $a_n \to 0^+$, tem-se

$$\lim \frac{f(a_n)}{a_n} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = L > 0.$$

Como $L \neq 0, +\infty$, segue do critério geral de comparação que $\sum a_n$ e $\sum f(a_n)$ têm a mesma natureza.

(b) Segue directamente de a), notando que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = 1$$

que as séries dadas convergem sse $\alpha > 1$, por comparação com as séries de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

7. 
- $\sum(1 + a_n)$ diverge, uma vez que $1 + a_n > 1$, logo o termo geral não converge para 0.
- $\sum \frac{1}{n^2+a_n}$ converge, uma vez que $\frac{1}{n^2+a_n} < \frac{1}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$ é convergente.

8. a) se $(b_n)$ é limitada, com $|b_n| < c$, então $|a_n b_n| < c|a_n| = ca_n$, logo pelo critério geral de comparação, $\sum a_n b_n$ converge (absolutamente).

b) se $\sum a_n$ converge, então $\lim a_n = 0$, logo $(a_n)$ é limitada, e por (a), tambem converge $\sum a_n^2$.

c) com $a_n = \frac{1}{n}$, tem-se $\sum \frac{1}{n}$ divergente e $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente.

9. a) O termo geral da série é uma sucessão divergente já que possui dois sublimites diferentes: 1 e $-1$. Logo, como o termo geral da série não tende para 0 concluimos que a série é divergente.

b) Comece por observar que, contrariamente ao caso anterior, a sucessão do termo geral da série converge para 0 o que não nos permite tirar nenhuma conclusão sobre a convergência da série. Observe igualmente que não se trata de uma série de termos não negativos pelo que os critérios anteriormente usados para esse tipo de séries (comparação, d'Alembert, Cauchy) não podem ser directamente aplicados aqui. Estudemos a série de módulos correspondente. Como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n n}{n^3 + 2} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 2},$$

por comparação desta série de termos positivos com a série convergente $\sum \frac{1}{n^2}$ concluimos que esta série é convergente e, portanto a série dada é absolutamente convergente.

c) Esta série é absolutamente convergente, uma vez que a série dos módulos é dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{3000}}{3^n}$, que é convergente (usando o Critério d'Alembert: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{3} < 1$).

d) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$. Consideremos a série de termos positivos $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$, e comparêmo-la com a série divergente $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\frac{\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1} \to \frac{1}{2} \neq 0, +\infty$$

logo a série de módulos considerada é também divergente. Concluimos que a série dada não pode ser absolutamente convergente. Tratando-se de uma série alternada tentemos usar o critério de Leibniz: considere-se a série dada na forma $\sum(-1)^n a_n$ com $a_n = \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} > 0$. Como

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} < 0$$

o que mostra que a sucessão de termo geral $a_n$ é decrescente, e como $a_n \to 0$, podemos concluir, pelo critério de Leibniz, que a série é convergente. Logo, a série é simplesmente convergente.

**Uma observação:** o critério de Leibniz só decide da convergência de uma série, nada dizendo sobre a convergência ser simples ou absoluta. O resultado anterior foi obtido depois de termos verificado previamente que a convergência não poderia ser absoluta.

e) É uma série alternada. Considerando a série dos módulos correspondente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, vemos que será divergente, uma vez que

$$\lim \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

e portanto a série dos módulos tem a mesma natureza que a série harmónica. Concluimos que a série dada não pode ser absolutamente convergente. Escrevendo a série dada na forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, com $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, temos que $a_n \to 0$ e $a_n$ é decrescente, uma vez que a função $\operatorname{sen} x$ é crescente para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{1}{n}$ é decrescente. Do critério de Leibniz, a série dada converge. Logo, a série é simplesmente convergente.

f) Como e) (veja Ex.1.s).

10. a) É uma série alternada. A série dos módulos é dada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, que é divergente (uma vez que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge sse $\alpha > 1$). Concluimos que a série dada não é absolutamente convergente. Escrevendo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, com $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, temos que $a_n \to 0$, $a_n > 0$ e

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} > 0$$

ou seja, $(a_n)$ é decrescente. Assim, pelo critério de Leibniz, a série é convergente. Logo, a série é simplesmente convergente.

b) É simplesmente convergente (proceder como em a)).

c) É divergente: o termo geral tem dois sublimites 1 e $-1$, logo é divergente. Como o termo geral não converge para 0, a série é divergente.

d) É absolutamente convergente: é uma série geométrica de razão $-\frac{1}{3}$.

11. (a) Temos $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $\frac{x}{2}$. Logo, converge absolutamente para $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$ e diverge para $\left|\frac{x}{2}\right| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -2 \wedge x \geq 2$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}, \frac{(x+2)^n}{(n+2)2^n}$ é uma série de potências, centrada em $-2$, cujo raio de convergência é dado por

$$R = \lim \frac{\frac{1}{(n+2)2^n}}{\frac{1}{(n+3)2^{n+1}}} = \lim \frac{2(n+3)}{(n+2)} = 2.$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|x+2| < 2 \Leftrightarrow -4 < x < 0$ e divergente para $|x+2| > 2 \Leftrightarrow x < -4 \wedge x > 0$. Para $|x+2| = 2$, temos:

- Se $x = 0$: obtemos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}$, que é divergente por comparação com a série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
- Se $x = -4$: obtemos a série alternada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$. Já vimos que a série dos módulos correspondente é divergente, logo esta série não é absolutamente convergente. No entanto, aplicando o critério de Leibniz, como $0 < \frac{1}{n+2}$ é decrescente, tem-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ é convergente, logo converge simplesmente.

Conclui-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+2)2^n}$ converge absolutamente para $x \in ]-4,0[$, converge simplesmente para $x=-4$ e diverge para $x \in ]-\infty,-4[\cup[0,+\infty[$.

(c) Faça-se $y=(2x)^3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{3n}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+1}.$$

Esta é uma série de potências cujo raio de convergência e dado por

$$R = \lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}} = 1.$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|y|<1$ e divergente para $|y|>1$. Se $y=1$ obtemos a série $\sum \frac{1}{n+1}$. Como $\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \to 1$, esta série tem a mesma natureza que a série harmónica $\sum \frac{1}{n}$, ou seja, é divergente. Se $y=-1$, obtemos a série alternada $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$. Dado que $\frac{1}{n+1} \to 0$ e que $\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0$, deduz-se, aplicando o critério de Leibniz, que a série é convergente. Como $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \sum \frac{1}{n+1}$ e já vimos que esta série é divergente, concluimos que para $y=-1$ a série é simplesmente convergente. Então, como

$$|y|<1 \quad \Leftrightarrow \quad |(2x)^3|<1 \quad \Leftrightarrow \quad |x|<\frac{1}{2},$$

$$y=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad y=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2},$$

concluimos que a série de potências dada é absolutamente convergente se $x \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$, simplesmente convergente se $x=-\frac{1}{2}$ e divergente se $x \in \left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[ \cup \left[\frac{1}{2},+\infty\right]$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4x)^n}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{2n}$, fazendo $y=-4x$. É uma série de potências com raio de convergência dado por

$$R = \lim \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n+2}} = 1.$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|y|<1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$ e divergente para $|y|>1 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{4} \vee x>\frac{1}{4}$. Para $|y|=1$, temos:

- Se $x = -\frac{1}{4}$: obtemos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ que é divergente por comparação com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
- Se $x = \frac{1}{4}$: obtemos a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$. Já vimos que a série dos módulos correspondente diverge, portanto a série não converge absolutamente. Do critério de Leibniz, uma vez que $\frac{1}{2n} \to 0$ e é decrescente, a série converge, e portanto converge simplesmente.

  Conclui-se que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{2n}$ converge absolutamente se $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, converge simplesmente para $x = \frac{1}{4}$ e diverge se $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$.

12. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{(n+1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} x^n$ é uma série de potências, centrada em 0, cujo raio de convergência é dado por

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\left|\frac{n^n}{(n+1)^n}\right|}} = \lim \frac{n+1}{n} = 1.$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|x| < 1$ e divergente para $|x| > 1$. Para $|x| = 1$, temos:

- Se $x = 1$: obtemos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Uma vez que

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \to e^{-1},$$

  concluimos que a série diverge uma vez que o termo geral não converge para 0.
- Se $x = -1$: obtemos a série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^n}$. Já vimos que $\lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = e^{-1}$, logo $(-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^n}$ tem dois sublimites $e^{-1}$ e $-e^{-1}$, e a série é portanto divergente, uma vez que o termo geral não converge para 0.

Conclui-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{(n+1)^n}$ converge absolutamente para $x \in ]-1, 1[$ e diverge para $x \in ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

13. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n!+1}$: é uma série de potências, centrada em 1, cujo raio de

convergência é dado por

$$
\begin{aligned}
R = \lim \frac{\frac{n!}{n!+1}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)!+1}} &= \lim \frac{n!}{(n+1)!}\,\frac{(n+1)!+1}{n!+1} \\
&= \lim \frac{(n+1)!+1}{(n+1)(n!+1)} = \lim \frac{(n+1)!+1}{(n+1)!+(n+1)} \\
&= \lim \frac{1+\frac{1}{(n+1)!}}{1+\frac{1}{n!}} = 1.
\end{aligned}
$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|x-1| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$ e divergente para $|x-1| > 1 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 1$. Para $|x| = 1$, temos:

- Se $x = 2$, obtem-se a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!+1}$, que é divergente uma vez que $\frac{n!}{n!+1} \to 1 \neq 0$.
- Se $x = 0$, obtem-se a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(-1)^n}{n!+1}$, que também é divergente, uma vez que $\frac{n!(-1)^n}{n!+1}$ tem dois sublimites $-1$ e $1$, logo o termo geral da série não converge para $0$.

Conclui-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n!+1}$ converge absolutamente para $x \in ]0,2[$ e diverge para $x \in ]-\infty,0] \cup [2,+\infty[$.

14. a) É uma série geométrica de razão $\frac{x}{x+1}$, logo converge absolutamente se $\left|\frac{x}{x+1}\right| < 1$ e diverge se $\left|\frac{x}{x+1}\right| \geq 1$. Resolvendo em ordem a $x$, temos $\left|\frac{x}{x+1}\right| < 1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$, ou seja $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$ converge absolutamente para $x > -\frac{1}{2}$ e diverge para $x \leq -\frac{1}{2}$.

    b) $R = 1$; a a série converge absolutamente para $-1 < x < 1$, converge simplesmente para $x = -1$ e diverge para $x < -1 \vee x \geq 1$.

    c) o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} y^n$ é $R = 1$ e esta série converge absoutamente para $|y| < 1$, converge simplesmente para $y = -1$ e diverge para $y < -1 \vee y \geq 1$. Fazendo $y = \frac{x-2}{x}$, conclui-se que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{x-2}{x}\right)^n$ converge absolutamente para $x > 1$, converge simplesmente para $x = 1$ e diverge para $x > 1$.

    d) $R = 1$; a série converge absolutamente para $-2 \leq x \leq 3$, converge simplesmente para $x = -2$ e diverge para $x < -2 \vee x \geq 4$;

    e) $R = 4$; a série converge absolutamente para $-3 \leq x \leq 5$ e diverge para $x < -3 \vee x > 5$.

15. a) O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{(2n+1)!}$ é $R = +\infty$, logo esta série converge absolutamente para $y \in \mathbb{R}$. Fazendo $y = x^2$, conclui-se que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ converge absolutamente para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

b) O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^n$ é $R = 1$, e esta série converge absolutamente para $-1 < y < 1$, converge simplesmente para $y = 1$ e diverge para $y \leq -1 \vee y > 1$. Fazendo $y = x^2$, conclui-se que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}$ converge absolutamente para $-1 < x < 1$, converge simplesmente para $x = -1 \vee x = 1$ e diverge para $x < -1 \vee x > 1$.

c) $R = 3$; a série converge absolutamente para $-2 < x < 4$, diverge se $x \leq -2 \vee x \geq 4$.

d) $R = |a|$; a série converge absolutamente para $-a - |a| < x < a - |a|$ (ou seja, para $a > 0$, $-2a < x < 0$, para $a < 0$, $0 < x < -2a$) e diverge para $x \leq -a - |a| \vee x \geq a - |a|$ (se $|x + a| = |a|$, as séries obtidas têm um termo geral que não converge para 0).

e) O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n^2+1}$ é $R = 1$; esta série converge absolutamente para $|y| \leq 1$ e diverge para $|y| > 1$. Fazendo $y = (5x+1)^2$, e resolvendo em ordem a $x$, temos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+1)^{2n}}{n^2+1}$ converge absolutamente para $-\frac{2}{5} \leq x \leq 0$ e diverge para $x < -\frac{2}{5} \vee x > 0$.

16. a) No ponto $-3$ a série dos módulos é dada por

$$\sum |a_n(-3)^n| = \sum |a_n| 3^n = \sum |a_n 3^n|$$

Como no ponto 3 a série é divergente, a série $\sum a_n 3^n$ é divergente, e $\sum |a_n 3^n|$ é também divergente. Logo a convergência em $-3$ é simples.

b) O raio de convergência da série é 3, uma vez que a convergência em $-3$ é simples (se $|x| < R$, a série converge absolutamente em $x$, se $|x| > R$, a série diverge em $x$, logo se a série converge simplesmente em $x$, tem-se $|x| = R$). Logo a série converge absolutamente para $|x| < 3$ e diverge para $|x| > 3$.

c) Por exemplo, $\sum \frac{1}{n 3^n} x^n$.

17. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+2} = \frac{x^2}{x+1}$, para $|x| < 1$ (dado que $\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y}$, para $|y| < 1$).

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,3^n}\, x^n = e^{\frac{x}{3}}$, para $x \in \mathbb{R}$ (dado que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, y^n = e^y$, para $y \in \mathbb{R}$).

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,(x+1)^{2n+1} = \operatorname{sen}(x+1)$, para $x \in \mathbb{R}$ (dado que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, y^{2n+1} = \operatorname{sen} y$, para $y \in \mathbb{R}$).

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 4^n}{(2n)!}\, x^{4n} = \cos(2x^2)$, para $x \in \mathbb{R}$ (dado que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, y^{2n} = \cos y$, para $y \in \mathbb{R}$).

18. (a) $\displaystyle e^{2x+1} = e\, e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e\, 2^n}{n!} x^n$, para $x \in \mathbb{R}$. Temos $f^{(n)}(0) = e\, 2^n$.

(b) $\displaystyle\frac{x}{2x+1} = \frac{x}{1-(-2x)} = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^{n-1}x^n$, para $|2x| < 1$.

Temos $f^{(n)}(0) = n!(-1)^{n-1}2^{n-1}$.

(c) $\displaystyle\cos(x+1)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(x+1)^{2n}$, para $x \in \mathbb{R}$.

Temos $f^{(2n)}(-1) = (2n)!\frac{(-1)^n}{(2n)!} = (-1)^n$, $f^{(2n+1)}(-1) = 0$.

(d) $\displaystyle(\log x)' = \frac{1}{x} = \frac{1}{2+(x-2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n$, para $\left|-\frac{x-2}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 4$. Logo,

$$\log x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}(x-2)^{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n}(x-2)^n + C.$$

Fazendo $x = 2$, temos $C = \log 2$.

Temos $f^{(n)}(0) = n!\,\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n}$, para $n \geq 1$ e $f(0) = \log 2$.

(e) $\displaystyle\left(\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)' = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$, para $x \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1} + C.$$

Fazendo $x = 0$, temos $C = 0$.
Temos $f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)!\,\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} = (2n)!\,\frac{(-1)^n}{n!}$ e $f^{(2n)}(0) = 0$.

(f) Como e), notando que $\operatorname{sen} y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1}$.

(g) $P\left(\dfrac{1}{(x+1)^2}\right) = -\dfrac{1}{x+1} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n$, para $|x| < 1$. Logo,

$$\frac{1}{(x+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n x^n.$$

Temos $f^{(n)}(0) = n!(n+1)(-1)^n = (n+1)!(-1)^n$.

(h) $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{2+(x-1)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\frac{x-1}{2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^n$, para $|x-1| < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.
Temos $f^{(n)}(1) = \frac{n!(-1)^n}{2^{n+1}}$.

(i) $(\operatorname{arctg} y)' = \dfrac{1}{1+y^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^{2n}$, para $|y^2| < 1 \Leftrightarrow -1 < y < 1$.
Logo,

$$\operatorname{arctg} y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}y^{2n+1} + C.$$

Fazendo $y = 0$, temos $C = 0$. Temos assim para $-1 < x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

$$\operatorname{arctg} x^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{4n+2}.$$

Temos $f^{(4n+2)}(0) = (4n+2)!\,\frac{(-1)^n}{2n+1}$, e $f^{(k)}(0) = 0$ para $k \neq 4n+2$.

(j) $(\log(x^2+1))' = \dfrac{2x}{x^2+1} = 2x\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n x^{2n+1}$, para $-1 < x < 1$. Logo,

$$\log(x^2+1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{2n+2}x^{2n+2} + C = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{2n} + C.$$

Fazendo $x = 0$, temos $C = 0$.
Temos $f^{(2n)}(0) = (2n)!\,\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $f^{(2n+1)}(0) = 0$.

19. a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, com $a_0 = a_3 = 1$, $a_n = 0$, $n \neq 0, 3$, para $x \in \mathbb{R}$;
b) Impossível, a função não está definida em 0;
c) $\displaystyle\log 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n} x^n$, para $x \in ]-3, 3]$;
d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n$, $x \in ]-1, 1[$;
e) Impossível, a função não está definida em 0;
f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n$, $x \in ]-1, 1[$;
g) Impossível, a função não está definida em 0;
h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2}$, $x \in [-1, 1]$;
i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{2n}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

20. a) $1 + (x-1) + (x-1)^3$, $x \in \mathbb{R}$;
b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$, $x \in ]0, 2[$;
c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(x-1)^n$, $x \in \mathbb{R}$;
d) $\displaystyle(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}(x-1)^n$, $x \in [0, 2]$;
e) $\displaystyle\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+2}}(n-1)(x-1)^n$, $x \in ]-1, 3[$;
f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1)(x-1)^n$, $x \in ]0, 2[$;
g) Impossível, a função não está definida em 1;
h) Impossível, a função não está definida em 1;
i) Impossível, a função não é diferenciável em 1.

21. (a) Temos

$$\frac{x^4}{1-2x} = x^4 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{n+4} = \sum_{n=4}^{\infty} 2^{n-4} x^n,$$

para $|2x| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

(b) Temos $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ e para $n \geq 4$, $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = 2^{n-4} \Leftrightarrow f^{(n)}(0) = n!\,2^{n-4}$. Como $f^{(4)}(0) = 4! > 0$, $f$ tem um mńimo em 0.

22. $(x-1)e^x = (x-1)e\,e^{x-1} = (x-1)e\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e(x-1)^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e}{(n-1)!}(x-1)^n$. Logo,

$$\frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{e}{(n-1)!} \Leftrightarrow f^{(n)}(1) = n\,e.$$

23. (a) A série de potências $\displaystyle\sum \frac{(x-1)^n}{3^n\sqrt{n}}$ tem raio de convergência dado por

$$R = \lim \frac{\frac{1}{3^n\sqrt{n}}}{\frac{1}{3^{n+1}\sqrt{n+1}}} = 3\sqrt{\frac{n+1}{n}} = 3.$$

Logo a série converge absolutamente para $|x-1| < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 4$ e diverge para $x < -2 \vee x > 4$. Em $x = 4$, obtem-se a série $\sum \frac{1}{3^n\sqrt{n}}$, que é uma série de termos não negativos convergente (justifique), logo absolutamente convergente. Em $x = -2$, obtem-se a série alternada $\sum \frac{(-1)^n}{3^n\sqrt{n}}$ que é também absolutamente convergente, uma vez que a série dos módulos converge. Logo, a série converge absolutamente para $x \in [-2, 4]$.

(b) $g(1) = 0$ e $\dfrac{g''(1)}{2!} = \dfrac{1}{9\sqrt{2}}$, logo $g''(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{9}$. Temos

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^{n-1}}{3^n\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(x-1)^n}{3^{n+1}\sqrt{n+1}}.$$

Escrevendo $x = 1+(x-1)$, a série de Taylor no ponto 1 de $x+g'(x)$ é

$$1+(x-1)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(x-1)^n}{3^{n+1}\sqrt{n+1}} = \frac{4}{3}+(1+\frac{\sqrt{2}}{9})(x-1)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+1)(x-1)^n}{3^{n+1}\sqrt{n+1}}.$$

24. Tem-se

$$(\log(1+y))' = \frac{1}{1+y} = \sum_{n=0}^{\infty}(-y)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^n,$$

para $|y| < 1$. Primitivando obtemos

$$\log(1+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} y^{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^n + C.$$

Fazendo $y = 0$, temos $C = 0$. Conclui-se que, para $|x^3| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, a série de MacLaurin para $\phi$ é:

$$\phi(x) = x\log(1+x^3) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x^3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{3n+1}.$$

Do desenvolvimento acima temos:

$$\phi'(0) = \phi''(0) = \phi'''(0) = 0, \quad \phi^{(4)}(0) = 4! > 0,$$

e portanto a função tem um mínimo em 0.

25. Do Teorema Fundamental do Cálculo, $\phi'(x) = 2x\log(1+x^4)$. Como $\log(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^n$, para $|y| < 1$ (justifique), temos

$$\phi'(x) = 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{4n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} x^{4n+1},$$

para $|x^4| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$. Logo, para $-1 < x < 1$,

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n(4n+2)} x^{4n+2} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)} x^{4n+2} + C.$$

Fazendo $x = 0$, temos $C = 0$.

Como $\phi^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$ e $\phi^{(6)}(0) = 6!\,\frac{1}{3} > 0$, $\phi$ tem um mínimo em 0.