Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

2ª Aula Prática

Soluções e algumas resoluções abreviadas

1. a) Verdadeira; b) Falsa; c) Falsa; d) Falsa; e) Verdadeira; f) Falsa; g) Verdadeira; h) Verdadeira; i) Falsa; j) Falsa; k) Verdadeira; l) Falsa; m) Verdadeira.

2. Seja $a > 0$. Se $a \geq 1$: como, para $a > 0$, $\frac{1}{a} > 0$, temos
$$a + \frac{1}{a} \geq 1 + 0 = 1.$$
Se $0 < a < 1$: temos $a^{-1} > 1$, e da mesma forma
$$a + \frac{1}{a} > 0 + 1 > 1.$$

3. a) $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}_1$:
Para $n = 1$, temos $2 \cdot 1 - 1 = 1$, que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}_1$, temos $1+3+\cdots+(2n-1) = n^2$.
Tese (a provar): $1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = (n+1)^2$.
Usando a hipótese de indução, temos:
$$1+3+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1) = n^2+(2n+2-1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$$
como queríamos mostrar.

   b) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, para $n \in \mathbb{N}_1$:
Para $n = 1$, temos $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}_1$, temos $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.
Tese (a provar): $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$.
Usando a hipótese de indução, temos:
$$\begin{aligned}\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.\end{aligned}$$
como queríamos mostrar.

4. b) Dado $a \in \mathbb{R}$, $(a-1)(1+a+\cdots+a^n) = a^{n+1}-1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:
Para $n = 0$, a condição acima fica $a-1 = a-1$ que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $(a-1)(1+a+\cdots+a^n) = a^{n+1}-1$.
Tese: $(a-1)(1+a+\cdots+a^n+a^{n+1}) = a^{n+2}-1$.
Simplificando o lado esquerdo da igualdade acima, temos que

$$(a-1)(1+a+\cdots+a^{n+1}) = (a-1)(1+a+\cdots+a^n)+(a-1)a^{n+1}.$$

Usando a hipótese de indução, temos agora

$$\begin{aligned}(a-1)(1+a+\cdots+a^{n+1}) &= a^{n+1}-1+(a-1)a^{n+1}. \\ &= a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1} \\ &= a^{n+2}-1,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

c) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!} = 1-\frac{1}{(n+1)!}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:
Para $n = 0$, a condição fica $0 = 1-\frac{1}{1!} \Leftrightarrow 0 = 0$, que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!} = 1-\frac{1}{(n+1)!}$.
Tese: $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!} = 1-\frac{1}{(n+2)!}$.
Usando a hipótese de indução,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!} &= \left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right)+\left(\frac{n+1}{(n+2)!}\right) \\ &= 1-\frac{n+2-n-1}{(n+2)!} \\ &= 1-\frac{1}{(n+2)!}\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

5. a) $(n+2)! \geq 2^{2n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$:
Para $n = 1$, temos que $3! \geq 4$ que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$ com $n \in \mathbb{N}_1$, temos $(n+2)! \geq 2^{2n}$.
Tese: $(n+3)! \geq 2^{2n+2}$.

Temos que $(n+3)! \geq 2^{2n+2} \Leftrightarrow (n+3)(n+2)! \geq 4 \cdot 2^{2n}$. Como, por hipótese de indução, $(n+2)! \geq 2^{2n}$ e, para $n \geq 1$, $n+3 \geq 4 > 0$, temos então que

$$(n+3)(n+2)! \geq 4 \cdot 2^{2n}$$

como queríamos mostrar.

b) $2n - 3 < 2^{n-2}$, para todo o natural $n \geq 5$:

Para $n = 5$, temos que $10 - 3 < 2^3 \Leftrightarrow 7 < 8$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 5$, temos $2n-3 < 2^{n-2}$.

Tese: $2(n+1) - 3 < 2^{(n+1)-2}$.

Desenvolvendo o lado esquerdo da desigualdade acima e usando a hipótese, temos

$$2(n+1) - 3 = 2n + 2 - 3 = (2n-3) + 2 < 2^{n-2} + 2,$$

Como, para $n \geq 5$, temos $2 < 2^{n-2}$, conclui-se que $2^{n-2} + 2 < 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$. Logo

$$2(n+1) - 3 < 2^{n-1}.$$

c) $7^n - 1$ é divisível por 6 para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$:

Para $n = 1$, temos $7^1 - 1 = 6$, que é divísivel por 6.

Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}_1$, $7^n - 1$ é divísivel por 6.

Tese: $7^{n+1} - 1$ é divísivel por 6.

Então:

$$7^{n+1} - 1 = 7 \cdot 7^n - 1 = (6+1)7^n - 1 = 6 \cdot 7^n + 7^n - 1.$$

Uma vez que $6 \cdot 7^n$ é divisível por 6, e, por hipótese de indução, $7^n - 1$ também, a sua soma será também divisível por 6.

6. Sendo $a > -1$ e $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$:

Para $n = 0$, a condição fica $(1+a)^0 \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq 1$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Tese: $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$.

Desenvolvendo o lado esquerdo e usando a hipótese de indução, temos que

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a).$$

Como

$$(1+na)(1+a) = 1+a+na+na^2 = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$$

uma vez que $na^2 \geq 0$, temos agora $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$, como queríamos mostrar.

7. Seja $P(n)$ a condição"n^2+3n+1 é par".

   a) Vamos ver que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, ou seja, que se n^2+3n+1 é par, também $(n+1)^2+3(n+1)+1$ é par. Temos

   $$(n+1)^2+3(n+1)+1 = n^2+2n+1+3n+3+1 = (n^2+3n+1)+2n+4.$$

   Assumindo que n^2+3n+1 é par, como $2n+4 = 2(n+2)$ é também par, conclui-se que $(n+1)^2+3(n+1)+1$ sendo uma soma de números pares será par.

   b) Não.

   c) Indução... (Como acima: se n^2+3n+1 é ímpar, $(n+1)^2+3(n+1)+1$ será uma soma de um número ímpar com um número par, e será portanto ímpar. Mas neste caso $P(0)$ é verdadeira: 1 é ímpar.)

10. Para $n = 1$, temos $u_1 = \sqrt{2^1-1} = 1$.
    Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{2^n-1}$.
    Tese: $u_{n+1} = \sqrt{2^{n+1}-1}$.
    Temos por hipótese, $u_n^2 = 2^n-1$. Assim, usando a fórmula de recorrência,

    $$u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2+1} = \sqrt{2(2^n-1)+1} = \sqrt{2^{n+1}-2+1} = \sqrt{2^{n+1}-1},$$

    como queríamos mostrar.

11. Seja $n \in \mathbb{N}$ ímpar, com $n = 2k+1$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Então, $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$ é ímpar, uma vez que $4k^2+4k$ é par para qualquer k.
    Conclui-se que se n^2 é par, n também será.

12. Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$, ou seja $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{r}{s}$, com $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$. Então, $-x = \frac{-p}{q}$, $x^{-1} = \frac{q}{p}$, $x+y = \frac{p}{q}+\frac{r}{s} = \frac{ps+rq}{qs}$, logo $-x$, x^{-1}, $x+y \in \mathbb{Q}$.

13. Seja $x \neq 0$ um racional e y um irracional. Se $x+y$ fosse racional, uma vez que a soma e a subtracção de dois racionais é também racional, teriamos que $(x+y)-x$ seria racional. Mas $(x+y)-x=y$, logo y seria racional, o que contradiz a hipótese. Conclui-se que $x+y$ é irracional.

    Para mostrar $x-y$, xy e y/x são irracionais, a prova é semelhante (usando o facto da soma, divisão e multiplicação de racionais ser racional).

    Sendo x e y irracionais, a sua soma, diferença, produto e quociente podem ser ou não ser irracionais: por exemplo: com $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$,

    $$\sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \quad \sqrt{2}+(-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2}\sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}, \quad \text{etc.}$$