Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

5ª Aula Prática

Soluções e algumas resoluções abreviadas

1. $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ limitada, $-\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$; convergente $\lim \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$.

   $v_n = \frac{n^{n+1}}{n^n+1}$ não majorada, não convergente.

   $w_n = u_n v_n$ limitada, não convergente, $u_n v_n = \frac{(-1)^{n+1} n^{n+1}}{n(n^n+1)} = \frac{(-1)^{n+1} n^n}{n^n+1}$ tem dois sublimites diferentes, 1, -1.

2. $u_n = \cos(n!\pi)$: como, para $n > 1$, $n!$ é um número natural par, temos $\cos(n!\pi) = 1$, para qualquer $n > 1$. Logo, (u_n) é convergente, com $\lim u_n = 1$,

   $v_n = \frac{n\cos(n\pi)}{2n+1}$: temos $\cos(n\pi) = (-1)^n$ e $\frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}$, logo (v_n) terá dois sublimites diferentes, $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$, e não é convergente.

   $w_n = \frac{1+a^n}{1+a^{2n}}$ $\quad (a \in \mathbb{R})$. Tem-se $\lim w_n = 1$ se $|a| < 1$ ou $a = 1$, não tem limite se $a = -1$, $\lim w_n = 0$ se $|a| > 1$.

3. a) 0; b) não existe, a sucessão tem dois sublimites diferentes, 0 e 2; c) não existe, a sucessão não é limitada; d) 2; e) $\frac{1}{2}$; f) não existe, a sucessão tem dois sublimites diferentes, e e $-e$ (note que $\left(-1 - \frac{1}{n}\right)^n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$).

4. Se (u_n) é convergente, com $\lim u_n = a$, serão também as suas subsucessões (u_{2n}) e (u_{2n+1}), com $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = a$. Por outro lado,

$$u_{2n} \in]0,1[\Rightarrow a \in [0,1],$$

$$u_{2n+1} \in \mathbb{R} \setminus]0,1[=]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\Rightarrow a \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[.$$

   Logo, $a \in \{0, 1\}$.

5. Seja (u_n) tal que $u_1 = a$, para $a \in \mathbb{R}$, e $u_{n+1} = (-1)^n u_n + \frac{u_n}{n+1}$. Se (u_n) é convergente, com $\lim u_n = l$, temos que

   - $\frac{u_n}{n+1}$ é convergente, com $\lim \frac{u_n}{n+1} = \lim u_n \cdot \frac{1}{n+1} = l \cdot 0 = 0$
   - (u_{n+1}) é convergente, uma vez que é uma subsucessão de (u_n), com $\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$.

Logo, $(-1)^n u_n = u_{n+1} - \frac{u_n}{n+1}$ é também convergente. Mas, considerando as subsucessão dos termos pares e dos termos ímpares, temos $(-1)^{2n}u_{2n} = u_{2n} \to l$ e $(-1)^{2n+1}u_{2n+1} = -u_{2n+1} \to -l$. Como $(-1)^n u_n$ converge, tem-se $l = -l \Leftrightarrow 2l = 0 \Leftrightarrow l = 0$, como queríamos mostrar.

6. (a) $S = \{-2, 2\}$ em $\mathbb{R}$ e em $\overline{\mathbb{R}}$;
   (b) $S = \{0\}$ em $\mathbb{R}$, $S = \{0, +\infty\}$ em $\overline{\mathbb{R}}$;
   (c) $S = \emptyset$ em $\mathbb{R}$, $S = \{+\infty\}$ em $\overline{\mathbb{R}}$;
   (d) $S = \mathbb{N}_1$ em $\mathbb{R}$, $S = \mathbb{N}_1 \cup \{+\infty\}$ em $\overline{\mathbb{R}}$.

   Sim, por exemplo, (b). Não, se os sublimites e a convergência da sucessão forem considerados em $\overline{\mathbb{R}}$.

7. c) (i) Verdadeiro: A é limitado, logo uma tal sucessão seria monótona e limitada e portanto convergente.
   (ii) Falso: $u_n = -1 + \frac{1}{3n}$.
   (iii) Falso: $u_n = -\frac{1}{n}$.
   (iv) Verdadeiro: B é limitado, logo qualquer sucessão de termos em B será limitada e pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, terá uma subsucessão convergente.
   (v) Falso: $u_n = \frac{1}{2}$ é uma sucessão de termos em B e o conjunto dos seus sublimites é $\{\frac{1}{2}\}$.

8. a) $A = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left]2, +\infty\right[$.

   c) $A \cap B \cap \mathbb{R}^- = \left]-\infty, -1\right]$, logo qualquer sucessão de termos em $A \cap B \cap \mathbb{R}^-$ será majorada. Logo, sendo crescente, será convergente.

   d) $B \cap \mathbb{R}^+ = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Se (x_n) tem termos em $B \cap \mathbb{R}^+$ e $y_n = (-1)^n x_n$, teremos, para n par, $y_n \geq \frac{1}{2}$ e, para n ímpar, $y_n \leq -\frac{1}{2}$. Logo (y_n) não é convergente.

   e) $x_n = 2 + \frac{\pi}{n}$.

9. a) Falso: por exemplo, $u_n = 3 + (-1)^n$, é limitada, tem termos em A e não é convergente, uma vez que tem dois sublimites diferentes: 2 e 4.

   b) Verdadeiro: se (u_n) é monótona e tem termos em $A \cap V_{1/2}(0)$, será monótona e limitada, logo convergente em $\mathbb{R}$.

c) Verdadeiro: se (u_n) é uma sucessão de termos em $A \cup B$ com $\lim u_n = a < 0$ então $u_n < \frac{a}{2}$ a partir de certa ordem. Em particular, $u_n \in B$ e o conjunto $B \cap \{x : x < \frac{a}{2}\}$ é finito. Logo (u_n) não poderia ser estritamente decrescente.

10. (i) Verdadeiro.

 (ii) Verdadeiro.

 (iii) Falso.

11. a) Por definição, $u_n \to -\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$ sse dado $\epsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}_1$ tal que, para $n > p$, $u_n < -\frac{1}{\epsilon}$. Seja então $\epsilon > 0$ dado,

$$1 - \sqrt{n} < -\frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow \sqrt{n} > 1 + \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow n > \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)^2.$$

Seja $p \in \mathbb{N}_1$ tal que $p > \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)^2$. para $n > p$, temos $1 - \sqrt{n} < -\frac{1}{\epsilon}$. Logo $1 - \sqrt{n} \to -\infty$.

12. a) $\frac{n^n}{1000^n} = \left(\frac{n}{1000}\right)^n$. Como $\lim \frac{n}{1000} = +\infty$, temos $\lim \frac{n^n}{1000^n} = +\infty$.
Alternativamente, como

$$\lim \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{1000^{n+1}}}{\frac{n^n}{1000^n}} = \lim \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{1000^n}{1000^{n+1}} = \frac{(n+1)}{1000} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = +\infty > 1$$

temos $\lim \frac{n^n}{1000^n} = +\infty$.

b) $\lim n^{n+1} - n^n = \lim n^n(n-1) = +\infty$.

c) $\lim 3^n - (2n)! = \lim (2n)! \left(\frac{3^n}{(2n)!} - 1\right) = -\infty$.

d) $\lim (n! - n^{1000})^n = \lim \left(\frac{n!}{n^{1000}} - 1\right)^n = +\infty$.

e) $\frac{(2n)!}{n!} = (n+1)(n+2)\ldots(n+n) > n^n$. Como $\lim n^n = +\infty$, então $\lim \frac{(2n)!}{n!} = +\infty$.
Alternativamente, como

$$\lim \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!}} = \lim \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} = +\infty > 1$$

temos $\lim \frac{(2n)!}{n!} = +\infty$.

f) Como $\lim \frac{n+2}{n+1} = \lim \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1$, tem-se, $\lim \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} = 1^0 = 1$.

g) Como, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $c > 1$, $\lim \frac{n^\alpha}{c^n} = 0$, tem-se $\lim \frac{n^{1000}}{1.0001^n} = 0$.

h) Neste caso, $\lim \frac{n}{n^2+1} = 0$ e, logo, estamos na presença de uma indeterminação do tipo 0^0. Mas, como

$$\lim \frac{\frac{n+1}{(n+1)^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}} = 1, \qquad \text{(verifique!)}$$

podemos concluir que $\lim \sqrt[n]{\frac{n}{n^2+1}} = 1$.

i) Como $\lim(3^n+2) = +\infty$, temos uma indeterminação do tipo $(+\infty)^0$. Como

$$\lim \frac{3^{n+1}+2}{3^n+2} = 3, \qquad \text{(verifique!)}$$

concluímos que $\lim \sqrt[n]{3^n+2} = 3$.

j) $\lim \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n = 2^{+\infty} = +\infty$.

k) Neste caso temos uma indeterminação do tipo 1^∞. No entanto,

$$\lim \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^n} = \lim \left(1 + \frac{-2}{2^n}\right)^{2^n} = e^{-2}$$

dado que $2^n \to +\infty$.

l) Temos uma indeterminação do tipo $(+\infty)^0$. Como

$$\lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim n + 1 = +\infty,$$

concluímos que $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

m) Novamente temos uma indeterminação do tipo 1^∞. Neste caso,

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^n = +\infty.$$

13. a) $\frac{2}{3}$; b) 0; c) $\frac{1}{2}$; d) $+\infty$; e) não é convergente em $\overline{\mathbb{R}}$; f) 0; g) 1; h) 0; i) $+\infty$; j) 1; k) 2; l) $+\infty$; m) $+\infty$; n) $\frac{1}{e}$; o) 1.

14. a) $\lim \frac{n!}{n^{1000}} = +\infty$, uma vez que $\lim \frac{n!}{n^p} = +\infty$, para qualquer $p \in \mathbb{N}$.

b) $\lim \frac{(2n)!+2}{(3n)!+3} = 0$, porque $\lim \frac{(2n)!}{(3n)!} = 0$ (calcular!).

c) $\lim \frac{(2n)!}{(2n)^n} = +\infty$, porque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$, com $u_n = \frac{(2n)!}{(2n)^n}$ (calcular!).

d) $\lim \frac{(n!)^2}{(2n)!+2} = 0$, porque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} < 1$, com $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!+2}$ (calcular!).

e) $\lim \frac{2^n n!}{n^n} = 0$, porque porque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{e} < 1$, com $u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$ (calcular!).

f) $\lim \frac{3^n n!}{n^n} = +\infty$, porque porque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{e} > 1$, com $u_n = \frac{3^n n!}{n^n}$ (calcular!).

g) $\lim n^{\frac{1}{n}} = 1$, porque $\lim \frac{n+1}{n} = 1$.

h) $\lim \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$, porque $\lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$.

i) $\lim \left(\frac{1}{n}\right)^n = \lim \frac{1}{n^n} = 0$,

j) $\lim \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n = 2^{+\infty} = +\infty$,

k) $\lim \left(\frac{n-1}{2n^2+1}\right)^{\frac{2}{n}} = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{2n^2+1}\right)^2} = 1$, porque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, com $u_n = \left(\frac{n-1}{2n^2+1}\right)^2$.

l) $\lim \frac{2^{(n^2)}}{15^n} = +\infty$, porque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty > 1$, com $u_n = \frac{2^{(n^2)}}{15^n}$ (verifique!) .

15. a) i) Por definição, $u_n \to +\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$ sse dado $\epsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}_1$ tal que, para $n > p$, $u_n > \frac{1}{\epsilon}$. Neste caso, $u_n > 0$, logo

$$u_n > \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} < \epsilon,$$

e assim $\frac{1}{u_n} \to 0$.

b) Não. Por exemplo, $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$ e $\frac{1}{u_n} = (-1)^n n$ não é convergente em $\overline{\mathbb{R}}$.