Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

6ª Aula Prática

Soluções e algumas resoluções abreviadas

1. a) Como e^x é crescente, com contradomínio $]0,+\infty[$, o contradomínio de f é $]e^{-2},+\infty[$. Para $x>0$ e $y\in]e^{-2},+\infty[$, temos

$$f(x)=y\Leftrightarrow e^{x^2-2}=y\Leftrightarrow x^2-2=\log y\Leftrightarrow x=\sqrt{2+\log y}.$$

Logo, a inversa de f é

$$f^{-1}:]e^{-2},+\infty[\to\mathbb{R}^+,\quad f^{-1}(y)=\sqrt{2+\log y}.$$

b) O contradomínio de $\operatorname{sen} x$ restrito a $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ é $\operatorname{sen}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[=]-1,1[$, logo o contradomínio de f é $]-2,2[$. Para $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $y\in]-2,2[$, temos

$$f(x)=y\Leftrightarrow 2\operatorname{sen} x=y\Leftrightarrow x=\operatorname{arcsen}\frac{y}{2}$$

(note-se que $\frac{y}{2}\in]-1,1[$, que é o domínio de $\operatorname{arcsen} x$). Logo a inversa de f é

$$f^{-1}:]-2,2[\to\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\quad f^{-1}(y)=\operatorname{arcsen}\frac{y}{2}.$$

c) $f^{-1}:\ ]-1,1[\ \to\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\quad f^{-1}(y)=\frac{\arccos y}{2}$.

d) $f^{-1}:\ \mathbb{R}\to]1-\frac{\pi}{2},1+\frac{\pi}{2}[,\quad f^{-1}(y)=1+\operatorname{arctg} y$.

2. Por definição, $\operatorname{arcsen}[-1,1]=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\arccos[-1,1]=[0,\pi]$. Tem-se $\arccos 0=\frac{\pi}{2}$, $\arccos 1=0$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$, $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$, $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$, $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$.

3. $\operatorname{sen} x=a\Leftrightarrow x=\operatorname{arcsen} a+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, $\operatorname{tg} x=a\Leftrightarrow x=\operatorname{arctg} a+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

4. a) Directamente da definição de arcos.

b) Directamente da definição de arcsen.

c) Se $\alpha=\operatorname{arcsen} x$, então $\operatorname{sen}\alpha=x$ e $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Queremos calcular $\cos\alpha$. De $\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha=1$, temos $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$. Como $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\alpha\geq 0$, vem

$$\cos(\operatorname{arcsen} x)=\cos\alpha=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}.$$

d) Idêntico a c).

e) Se $\alpha = \operatorname{arcsen} x$, $x \neq \pm 1$, então $\operatorname{sen}\alpha = x$ e $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Queremos calcular $\operatorname{tg}\alpha$. De $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$ temos

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} - 1 = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha}} = \frac{|\operatorname{sen}\alpha|}{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}.$$

Logo,

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{|x|}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$

Se $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, então $\operatorname{sen}\alpha \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$. Como $\operatorname{tg}\alpha \geq 0$, temos

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Se $\alpha \in \left[0, -\frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{sen}\alpha \leq 0 \Leftrightarrow |x| = -x$. Como $\operatorname{tg}\alpha \leq 0$, temos

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{-x}{-\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

f) Idêntico a e).

5. $f : D \to \mathbb{R}$ função injectiva e $g : f(D) \to D$ a sua inversa.

a) Seja f crescente. Como f é injectiva, f é estritamente crescente. Logo, para $x, x' \in D$, $x > x' \Leftrightarrow f(x) > f(x')$. Então, para $y, y' \in f(D)$, $y = f(x)$, com $y' = f(x')$ (ou seja, $g(y) = x$, $g(y') = x'$) temos

$$y > y' \Leftrightarrow f(x) > f(x') \Leftrightarrow x > x' \Leftrightarrow g(y) > g(y').$$

Logo g é (estritamente) crescente.

b) Para $y \in f(D)$, seja $x \in D$, com $y = f(x)$, ou seja, tal que $g(y) = x$. Então $-y = -f(x) = f(-x)$, porque f é ímpar, logo $g(-y) = -x$, e assim $g(-y) = -x = -g(y)$, e g é ímpar.

c) Directamente de a), b) e das propriedades de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$.

6. a) $]-2, 2[$; b) $\mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$; c) $\mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$; d) $]1, +\infty[$; e) $[0, 1[$; f) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; g) $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$; h) $]-\infty, 0]$; i) $[-1, \operatorname{sen} 1[$.

7. Como arctg é uma função limitada, $\operatorname{arctg}(u_n)$ é uma sucessão limitada.

Por outro lado, como arctg é uma função crescente, se (u_n) é uma sucessão monótona crescente (para decrescente é idúntico), $(\operatorname{arctg} u_n)$ será também crescente:

$$u_{n+1} \geq u_n \Rightarrow \operatorname{arctg}(u_{n+1}) \geq \operatorname{arctg}(u_n).$$

Sendo monótona e limitada, $(\operatorname{arctg} u_n)$ é convergente.

8. f é contínua em $a \in \mathbb{R}$ sse dado $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$|x-a| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta.$$

Para $f(x) = x^2 + 1$: dados $a \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$, temos

$$|f(x)-f(a)| = |x^2+1-a^2-1| = |x^2-a^2| = |x+a||x-a| \leq (|x|+|a|)|x-a|.$$

Se $x \in V_\epsilon(a)$ temos $|x-a| < \epsilon$ e também $|x| = |(x-a)+a| \leq |x-a| + |a| < \epsilon + |a|$. Logo, para $x \in V_\epsilon(a)$ tem-se

$$|f(x) - f(a)| < (\epsilon + |a| + |a|)|x-a| < (2|a| + \epsilon)\epsilon.$$

Agora para que $|f(x) - f(a)| < \delta$ é suficiente escolher $\epsilon > 0$ tal que

$$(2|a| + \epsilon)\epsilon < \delta \Leftrightarrow \epsilon^2 + 2|a|\epsilon - \delta < 0.$$

Como $\epsilon^2 + 2|a|\epsilon - \delta = 0 \Leftrightarrow \epsilon = \frac{-2|a| \pm \sqrt{4|a|^2+4\delta}}{2} = -|a| \pm \sqrt{|a|^2 + \delta}$, temos então que é suficiente tomar ϵ tal que

$$0 < \epsilon < -|a| + \sqrt{|a|^2 + \delta},$$

para obter que $|x-a| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta$.

9. Seja $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua (com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$), e (x_n) de termos em $[a,b]$ tal que $\lim \phi(x_n) = 0$.
   Como (x_n) tem os termos em $[a,b]$, (x_n) é limitada e, do Teorema de Bolzano-Weierstrass, tem uma subsucessão convergente que designamos por (x_{p_n}). Como $\lim \phi(x_n) = 0$, e $(\phi(x_{p_n}))$ é uma subsucessão de $(\phi(x_n))$, temos $\lim \phi(x_{p_n}) = 0$.
   Por outro lado, como ϕ é contínua em $[a,b]$, $\lim \phi(x_{p_n}) = \phi(\lim x_{p_n})$. Logo, se $l = \lim x_{p_n}$, temos $\phi(l) = 0$.

10. Seja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[0,1]$.

    a) Se existisse uma sucessão (x_n) de termos em $[0,1]$ tal que $g(x_n) = n$ para todo n, então $\lim g(x_n) = +\infty$. Tomando uma subsucessão (x_{p_n}) convergente de (x_n), que existe pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, teríamos:

    $$\lim g(x_n) = +\infty \;\text{ e }\; \lim g(x_{p_n}) = g(\lim x_{p_n}),$$

    porque g é contínua. Logo $g(\lim x_{p_n}) = +\infty$, o que é absurdo. (Alternativamente, g não seria limitada em $[0,1]$, o que é impossível, do Teorema de Weierstrass, uma vez que g é contínua em $[0,1]$.)

b) Se (x_n) de termos em $[0,1]$ é tal que $g(x_n) = \frac{1}{n}$ para todo n, então $\lim g(x_n) = 0$. Além disso, sendo (x_n) limitada, possui uma subsucessão convergente em $\mathbb{R}$ como na alínea anterior. Designemos essa subsucessão por (x_{p_n}) e $\lim x_{p_n} = c$. Como $(x_{p_n}) \subset [0,1]$ e este intervalo é fechado $c \in [0,1]$. Como $(g(x_{p_n}))$ é uma subsucessão de $(g(x_n))$ temos também $\lim g(x_{p_n}) = 0$. Pelo critério de continuidade de Heine $\lim g(x_{p_n}) = g(c)$ e portanto $g(c) = 0$.

11. a) $\frac{x+1}{x^3+x}$ é dada pelo quociente de duas funções polinomiais, logo é contínua no seu domínio $D = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

 b) Como a): é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\}$;

 c) $\sqrt{x}$ é contínua em $[0, +\infty[$, $\frac{1}{x^2+x}$ é contínua no seu domínio (como em a)), ou seja em $\mathbb{R}\setminus\{-1, 0\}$. Logo $\sqrt{x} - \frac{1}{x^2+x}$ é contínua em $[0, +\infty[\cap \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} =]0, +\infty[$;

 d) $\operatorname{sen}\left(\cos\sqrt{1-x^2}\right)$ é dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios, logo é contínua no seu domínio $D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$;

 e) Como d): é contínua no seu domínio, $D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 > 0\} =]-1, 1[$;

 f) $\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{cotg} 2x}$ é dada pela composição de funções contínuas nos seus dominíos logo é contínua no seu domínio, ou seja em $D = \{x \in \mathbb{R} : 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge 2x \neq k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{4} : k \in \mathbb{Z}\}$;

 g) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ é dada pelo quociente de duas funções contínuas nos seus domínios, logo é contínua no seu domínio, $\mathbb{R}$. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$ é também dada pelo quociente de duas funções contínuas nos seus domínios, logo é contínua no seu domínio que é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Logo, $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

 h) $\frac{|x^2-1|}{x^2-1}$ é dada pelo quociente de duas funções contínuas nos seus domínios, logo será contínua no seu domínio que é $\mathbb{R}\{-1, 1\}$. (Nota: $\frac{|x^2-1|}{x^2-1} = 1$, se $x < -1 \vee x > 1$, e $\frac{|x^2-1|}{x^2-1} = -1$, se $-1 < x < 1$.)

 i) $\sqrt{-\operatorname{sen}^2 x}$ é dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios, logo é contínua no seu domínio, que é $D = \{x \in \mathbb{R} : -\operatorname{sen}^2 x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen}^2 x = 0\} = \{k\pi \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{Z}\}$.

12. Sendo f e h duas funções e $a \in \mathbb{R}$, tais que h é contínua em a e f é contínua em $h(a)$, então necessariamente $g = f \circ h$ é contínua em a. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto 1, e $g(x) = f(\operatorname{sen} x)$, então, como $\operatorname{sen} x$ é uma função contínua em qualquer $a \in \mathbb{R}$, g será contínua em $a \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen}(a) = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

13. Como tg e cotg são contínuas, respectivamente em $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, e $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, temos que $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$ é uma função contínua em $D = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$. Sendo f uma função contínua em 0, temos então que $g(x) = f(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x)$ é contínua em cada $a \in D$ satisfazendo $\operatorname{tg} a - \operatorname{cotg} a = 0$. Como,

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{cotg} a = \operatorname{tg} a - \frac{1}{\operatorname{tg} a} = \frac{\operatorname{tg}^2 a - 1}{\operatorname{tg} a},$$

e, portanto, $\operatorname{tg} a - \operatorname{cotg} a = 0$ equivale a $\operatorname{tg} a = \pm 1$, ou seja $a = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, concluimos que a função dada é necessariamente contínua nestes pontos.

14. Temos

$$f(x) = xd(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \in \mathbb{Q}\,, \\ x\,, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Para $a \neq 0$: se $a \in \mathbb{Q}$, podemos definir $x_n = a + \frac{1}{n}$, $y_n = a + \frac{\sqrt{2}}{n}$ e temos

– $x_n \to a$, $y_n \to a$,

– $x_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x_n) = 0 = f(a)$, $y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow f(y_n) = y_n = a + \frac{\sqrt{2}}{n} \to a \neq 0$.

Logo f não é contínua em a (usando a definição no sentido de Heine). Para $a \notin \mathbb{Q}$, a demonstração é semelhante.

(Alternativamente, usando a definição no sentido de Cauchy, existe $\delta > 0$, por exemplo, $\delta = |a|$, tal que em qualquer vizinhança de a existem pontos x tais que $|f(x) - f(a)| > \delta$: se $a \in \mathbb{Q}$, toma-se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, se $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, toma-se $x \in \mathbb{Q}$.)

Para $a = 0$: se (x_n) é uma sucessão arbitrária tal que $x_n \to 0$, então $f(x_n) = x_n d(x_n)$. Como d é limitada, $d(x_n)$ é uma sucessão limitada. Logo, como $x_n \to 0$, temos $f(x_n) = d(x_n)x_n \to 0 = f(0)$. Logo f é contínua em 0.

(Alternativamente, usando a definição no sentido de Cauchy,

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x|.$$

Logo, dado $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$, por exemplo, $\epsilon = \delta$ tal que

$$|x - 0| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \delta.$$

Logo f é contínua em 0.)

15. a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$: temos de mostrar que dado $\delta > 0$ arbitrário, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$|x - 0| < \epsilon \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta}.$$

Então, dado $\delta > 0$, temos

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow x^2 < \delta \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\delta}.$$

Tomando, por exemplo, $\epsilon = \sqrt{\delta}$, mostramos que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

c) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$: temos de mostrar que dado $\delta > 0$ arbitrário, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$x > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \sqrt{x} > \frac{1}{\delta}.$$

Dado $\delta > 0$, temos

$$\sqrt{x} > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\delta^2}.$$

Tomando, por exemplo, $\epsilon = \delta^2$, mostramos que $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

16. a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1} = 1$;

b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2(x-1)+x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x+1} = 1$;

c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0} x\,\frac{e^{x^2}-1}{x^2} = 0\cdot 1 = 0$, dado que $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

d) $\lim_{x\to 0} \left[x^2(1-\cos\frac{1}{x})\right] = 0$ (como g)).

e) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ não existe: se $x_n = \frac{1}{n\pi}$, e $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ temos que

$$x_n \to 0, \quad y_n \to 0, \quad \operatorname{sen}\frac{1}{x_n} = \operatorname{sen}(n\pi) = 0, \ \text{ e } \operatorname{sen}\frac{1}{y_n} = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+2n\pi) = 1.$$

Como $\lim \operatorname{sen}\frac{1}{x_n} \neq \lim \operatorname{sen}\frac{1}{y_n}$ e (x_n), (y_n) são sucessões convergente para 0, temos que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ não existe.

f) $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \operatorname{sen}(0) = 0$;

g) $\lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$: dada uma sucessão arbitrária (x_n) tal que $x_n \to 0$ (e $x_n \neq 0$), temos

$$\lim x_n \operatorname{sen}\frac{1}{x_n} = 0$$

uma vez que (x_n) é um infinitésimo e $(\operatorname{sen}\frac{1}{x_n})$ é uma sucessão limitada.

17. a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-2)} = -1$,

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x \arccos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x}\,\frac{5}{\cos x \arccos x} = 1 \cdot \frac{5}{\frac{\pi}{2}} = \frac{10}{\pi}$, uma vez que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.