Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

Exercícios de Revisão

Soluções e algumas resoluções abreviadas

1. a) $\operatorname{sen}(2a) = \operatorname{sen}(a+a) = \cos a \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} a \cos a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$;

   b) De $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, temos

$$\cos(a) = 2\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - 1 \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1+\cos a}{2}.$$

2. a) $\operatorname{sen}(\pi) = \operatorname{sen}\left(2\,\frac{\pi}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

   b) $\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Como $\operatorname{sen} x > 0$, para $x \in]0,\pi[$, tem-se $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

   c) Usar $\operatorname{sen}(a+b)$, com $b = 2\pi$.

   d) Usar $\operatorname{sen}(a+b)$, com $b = \frac{\pi}{2}$.

3. De Ex.1.c):

$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

   Se $a, b \in [0, \frac{\pi}{2}]$, com $a > b$, então $0 < \frac{a-b}{2} \leq \frac{\pi}{4}$, e $0 < \frac{a+b}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, logo $\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right) > 0$ (de $\cos x > 0$ para $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e de $\operatorname{sen}(a + \frac{\pi}{2}) = \cos a$ tem-se $\operatorname{sen} x > 0$, para $]0,\pi[$). Logo, $\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b > 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} a > \operatorname{sen} b$, e sen é estritamente crescente.

4. a) Escreva $\operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}(2x + x)$ e use as expressões para $\operatorname{sen}(2x)$, $\cos(2x)$ e a fórmula fundamental da trigonometria.

   b) De $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, temos

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{2} = 4\cos^3\frac{\pi}{6} - 3\cos\frac{\pi}{6} \quad &\Leftrightarrow \quad \cos\frac{\pi}{6}\left(4\cos^2\frac{\pi}{6} - 3\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\frac{\pi}{6} = 0 \vee \cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

   uma vez que $\cos x > 0$ para $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
   Usando a fórmula fundamental da trigonometria, temos $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

5. a) $1+\operatorname{tg}^2 x = 1+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$;

   b) Escreva $\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos(x-y)}$ e use as expressões para $\operatorname{sen}(x-y)$ e $\cos(x-y)$ em função de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{sen} y$, $\cos y$.

6. a) $e^{b\log a} = \left(e^{\log a}\right)^b = a^b$;

   b) Uma vez que $y = a^x$ sse $x = \log_a(y)$, para vermos que $\log_a y = \frac{\log y}{\log a}$, é suficiente mostrar que $a^{\frac{\log y}{\log a}} = y$. Então, de a),

$$a^{\frac{\log y}{\log a}} = e^{\frac{\log y}{\log a}\cdot\log a} = e^{\log y} = y.$$