Cálculo Diferencial e Integral I

Mestrados em Eng. Civil, Eng. Biológica e Eng. Química
Licenciaturas em Eng. do Ambiente, Eng. Geológica e Mineira,
Eng. de Materiais, Química e Eng. Território
1º Semestre de 2006/2007

Exemplos de primitivação de funções racionais[1]

Exemplo 1 (raízes reais simples) *Considere-se a função racional*

$$f(x) = \frac{4x^2 + x + 1}{x^3 - x} = \frac{4x^2 + x + 1}{x(x-1)(x+1)}$$

A decomposição em fracções simples, neste caso, é da forma ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

$$f(x) = \frac{4x^2 + x + 1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

pelo que

$$4x^2 + x + 1 = a(x-1)(x+1) + bx(x+1) + cx(x-1)$$

ou ainda

$$4x^2 + x + 1 = (a + b + c)x^2 + (b - c)x - a$$

Usando o princípio da identidade de polinómios,obtém-se o sistema

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ b - c = 1 \\ -a = 1 \end{cases}$$

cuja solução é $a = -1$, $b = 3$ *e* $c = 2$. *Logo*

$$f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1} \ ,$$

em cada intervalo contido no domínio da função. Em cada um desses intervalos, tem-se

$$\mathrm{P}\, f(x) = -\log|x| + 3\log|x-1| + 2\log|x+1| + k$$

com $k \in \mathbb{R}$.

[1] Ver [1].

Exemplo 2 (raízes reais simples e múltiplas) *Considere-se a função racional*

$$g(x) = \frac{4x+1}{x(x+1)^3}$$

Neste caso, a decomposição em fracções simples é da forma (com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$)

$$\frac{4x+1}{x(x+1)^3} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} + \frac{d}{(x+1)^3}$$

pelo que

$$4x + 1 = (a+b)x^3 + (3a+2b+c)x^2 + (3a+b+c+d)x + a \tag{1}$$

Obtém-se assim o sistema[2]

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 3a+b+c+d=4 \\ a=1 \end{cases}$$

cuja solução é $a = 1$, $b = c = -1$ e $d = 3$. Logo, em cada um dos intervalos contidos no domínio de g, tem-se

$$g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{(x+1)^3} \ .$$

Assim, em qualquer daqueles intervalos

$$\mathrm{P}\, g(x) = \log|x| - \log|x+1| + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{(x+1)^2} + k$$

com $k \in \mathbb{R}$.

---

[2] Alternativamente, a partir da equação (1), obtém-se

(i) Fazendo $x = 0$ vem $1 = a$, i.e., $a = 1$.

(ii) Fazendo $x = -1$ vem $-3 = -d$, i.e., $d = 3$.

(iii) Igualando os coeficientes de x^3 e de x^2, respectivamente, em ambos os membros da igualdade, vem

$$\begin{aligned} 0 = a+b &\quad\Rightarrow\quad b=-1 \\ 3a+2b+c=0 &\quad\Rightarrow\quad c=-1 \end{aligned}$$

Exemplo 3 (com um polinómio irredutível do 2º grau, simples) *Considere-se a função racional*

$$h(x) = \frac{x+2}{x^3-1} = \frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Como o segundo factor no denominador não tem raízes reais, não é possível, trabalhando com funções reais, decompôr a fracção numa soma de fracções simples dos tipos considerados nos dois Exemplos anteriores. No caso presente, tem-se (para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$)

$$\frac{x+2}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

pelo que

$$x+2 = a(x^2+x+1) + (bx+c)(x-1)$$

ou, de forma equivalente

$$x+2 = (a+b)x^2 + (a-b+c)x + a - c$$

O princípio da identidade de polinómios conduz assim ao sistema

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b+c=1 \\ a-c=2 \end{cases}$$

cuja solução é $a = 1$, $b = c = -1$. Logo

$$h(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+x+1} \ ,$$

em cada intervalo contido no domínio de g. A primeira parcela é de primitivação imediata, obtendo-se

$$\mathrm{P}\, h(x) = \log|x-1| - \mathrm{P}\, \frac{x+1}{x^2+x+1} \, .$$

Para primitivar a segunda parcela pode fazer-se

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{x+1}{(x+1/2)^2+3/4} = \frac{x+1}{(x-p)^2+q^2}$$

com $p = -1/2$, $q = \sqrt{3}/2$. Usa-se então a mudança de variável

$$x = \varphi(t) = p + qt = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, t \quad , \quad \varphi'(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\, t$$

que conduz, por substituição, à primitivação de

$$\phi'(t) = h(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{2}\frac{2t}{1+t^2}\,,$$

cuja primitiva é (a menos de uma constante)

$$\phi(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} t + \frac{1}{2}\log(1+t^2)\,.$$

Finalmente, sendo $t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)$, *obtém-se*

$$\mathrm{P}\,h(x) = \log|x-1| - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right) + k\,,$$

com $k \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4 (com um polinómio irredutível do 2º grau, duplo) *Considere-se a função racional*

$$r(x) = \frac{x^3+3x^2+5}{(x-1)(x^2+2)^2}\,.$$

A decomposição em soma de fracções simples é agora da forma

$$r(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2} + \frac{dx+e}{(x^2+2)^2}\,.$$

Por processo idêntico ao considerado anteriormente, obtêm-se as constantes

$$a = 1\ ,\ b = -1\ ,\ c = 0\ ,\ d = 1\ ,\ e = -1\,.$$

Logo,

$$r(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+2} + \frac{x-1}{(x^2+2)^2}\,.$$

As duas primeiras parcelas são de primitivação imediata. Quanto à terceira, pode ser escrita como

$$\frac{x}{(x^2+2)^2} - \frac{1}{(x^2+2)^2}\,,$$

sendo a primeira destas duas de primitivação imediata. A segunda pode obter-se da seguinte forma[3]*:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\,\frac{1}{(x^2+2)^2} &= \frac{1}{2}\,\mathrm{P}\,\frac{2}{(x^2+2)^2}\\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{P}\,\frac{x^2+2-x^2}{(x^2+2)^2}\\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{P}\,\frac{x^2+2}{(x^2+2)^2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{P}\,\frac{x^2}{(x^2+2)^2}\\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{P}\,\frac{1}{x^2+2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{P}\,\frac{x^2}{(x^2+2)^2} =\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\,\mathrm{P}\,\frac{x^2}{(x^2+2)^2}\,.
\end{aligned}$$

Finalmente, para lidar com a última parcela usamos primitivação por partes,

$$\mathrm{P}\,\frac{x^2}{(x^2+2)^2} = \mathrm{P}\,x\frac{x}{(x^2+2)^2} = -\frac{x}{2}\frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{P}\,\frac{1}{x^2+2}\,.$$

A última primitiva já é imediata (e de facto já a calculámos atrás). Deixa-se como exercício coligir todos os cálculos parciais e verificar que

$$\mathrm{P}\,r(x) = \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+2) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\,\frac{x+2}{x^2+2} + k$$

com $k \in \mathbb{R}$, em cada um dos intervalos contidos no domínio de r.

Referências

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[3] A ideia base é a que permite obter a fórmula de recorrência da página 478 de *Introdução à Análise Matemática* que, conjuntamente com uma mudança de variável $t = \frac{x+a}{b}$, permite lidar com primitivas da forma $\mathrm{P}\,\frac{1}{((x+a)^2+b^2)^n}$ com $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.