Cálculo Diferencial e Integral I

1º Exame

22 de Junho de 2007, 9 horas **Duração: 3h**

LEA, MEAer, LEAN, LEM, MEMec

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(2,5) I. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 + x - 2}{x|x-3|} \geq 0 \right\}, \qquad B = \{e^{n^2} : n \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Mostre que $A = [-2, 0[\cup [1, 3[\cup]3, +\infty[$.
2. Determine, ou justifique que não existem, $\inf B$, $\sup(A \cap B)$, $\sup((\mathbb{R} \setminus A) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $\min(B \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
3. Sendo f uma função real, contínua em A, e (u_n) uma sucessão com os termos em A, indique justificando se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições:
   a) Se (u_n) é decrescente, então é convergente.
   b) Se (u_n) é convergente, então $((-1)^n u_n)$ é divergente.
   c) Se (u_n) é convergente, então $(f(u_n))$ é convergente.

(3,5) II. 1. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)^n (n+1)!. \end{cases}$$

Mostre usando indução matemática que $u_n = (n!)^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

2. Estude a existência e, se for o caso, o valor em $\overline{\mathbb{R}}$ de cada um dos seguintes limites:

$$\text{a) } \lim \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^n, \qquad \text{b) } \lim \sqrt[n]{\frac{n!}{n + (3n)!}}, \qquad \text{c) } \lim \left(1 + \frac{\cos n}{9^n} \right)^{(-1)^n}.$$

(4,0) III. 1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em 0, tal que

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x > 0 \\ \frac{x^3 e^{\frac{1}{x}}}{1 + x^2}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

   a) Calcule $f(0)$.
   b) Estude f quanto à continuidade.
   c) Calcule $f'_e(0)$ e $f'_d(0)$. Será f diferenciável em 0?
   d) Calcule $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Justifique que o contradomínio de f contém $]-\infty, 0]$.

2. Seja $f : [0, \frac{4}{\pi}] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e g a função definida por $g(x) = f\left(\frac{1}{\operatorname{arcsen} x}\right)$. Determine o domínio de g e justifique que g tem máximo e mínimo.

Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste

22 de Junho de 2007, 9 horas **Duração: 1h30m**

LEA, MEAer, LEAN, LEM, MEMec

(As cotações dadas são para o exame. Para obter as cotações do teste multiplique por 2.)

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,5) IV. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \log(e^x + e^{-x})$.

1. Justifique que g é diferenciável no seu domínio e calcule g'.
2. Estude g quanto à monotonia, extremos e concavidades.
3. Seja
$$h(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} g\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$
Determine o domínio de h e justifique que h é diferenciável no seu domínio. Calcule h'.
4. Calcule
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}, \qquad \lim_{x \to 1} \frac{h(x)}{\log x}.$$

(4,0) V. 1. Determine uma primitiva das seguintes funções:

$$\text{a) } \frac{e^{1+\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{b) } \operatorname{sen}(2x)\sqrt{1+\cos^2 x}, \qquad \text{c) } \frac{1}{(5+x)\sqrt{x+1}}.$$

2. Calcule a área da região $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2} \log x, \ x \leq 2\}$.

3. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e F um integral indefinido de f, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$.

   a) Justifique que F é constante se e só se $F(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

   b) Justifique que se $\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt$, para alguns $b, c \in \mathbb{R}$, então existe $d \in \mathbb{R}$ com $f(d) = 0$.

(2,5) VI. 1. Determine a natureza das séries seguintes:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}, \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. Considere a seguinte série de potências $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n+1}(x+1)^n$.

   a) Determine o intervalo de convergência da séries de potências dada, indicando os pontos onde a convergência é absoluta e simples.

   b) Sendo $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n+1}(x+1)^n$, para x no intervalo obtido em a), determine $f^{(n)}(-1)$, $n \in \mathbb{N}$, e justifique que -1 é um ponto de extremo de f, classificando-o.