Cálculo Diferencial e Integral I

2º Exame

6 de Julho de 2007, 9h **Duração: 3h**

LEA, MEAer, LEAN, LEM, MEMec

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(5,0) I. 1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x| - \pi}{2x^2 + 3x} \leq 0 \right\}, \quad B = \left\{ \frac{\pi}{n} : n \in \mathbb{N}_1 \right\}.$$

a) Mostre que $A = \left[-\pi\,, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]\, 0, \pi\,\right]$.

b) Determine ou mostre que não existem, em $\mathbb{R}$, $\min A \cap \mathbb{Q}$, $\sup(A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$, $\inf B$, $\max(A \cap B)$.

c) Seja (x_n) uma sucessão crescente com os termos em $A \cap \mathbb{R}^+$. Justifique as seguintes afirmações:

i) (x_n) é convergente e $\lim x_n \in A$.

ii) Para qualquer função f contínua em A, $(f(x_n))$ é uma sucessão convergente.

2. Seja (u_n) a sucessão definida por

$$u_1 = 1 \quad \text{e} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{3 + 2u_n}, \quad \text{para } n \geq 1.$$

a) Prove, por indução matemática, que

$$u_n = \frac{2^{n-1}}{3^n - 2^n}, \quad \text{para qualquer } n \in \mathbb{N}_1.$$

b) Determine a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

3. Estude a existência e, se for o caso, o valor em $\overline{\mathbb{R}}$ de cada um dos seguintes limites:

$$\text{a)} \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{(2n)!}\right)^{2^{2n}}, \qquad \text{b)} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen} x}.$$

(7,0) II. 1. Considere a função $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que h é par e, para $x > 0$, $h(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

a) Calcule $\lim_{x \to 0} h(x)$ e justifique que h é prolongável por continuidade a 0.

b) Sendo $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o prolongamento por continuidade de h a 0, decida se H é diferenciável em 0.

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{x/(x^2-2x+2)}.$$

a) Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule $f'(x)$.

b) Determine os intervalos em que f é monótona.

c) Verifique que f tem extremos nos pontos $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ e diga se são pontos de máximo ou mínimo, local ou absoluto. Determine, justificando, o contradomínio de f.

d) Mostre que a função g definida, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, por

$$g(x) = \int_0^{2x} f(t)\, dt$$

é duas vezes diferenciável e calcule $g'(x)$ e $g''(x)$.

e) Determine o sinal de g e verifique que g é crescente em $\mathbb{R}$. Determine os pontos de inflexão do gráfico de g.

(6,0) III. 1. Determine a função $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right), \qquad F(1) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Calcule o valor dos seguintes integrais:

$$\text{a)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}\, dx, \qquad \text{b)} \int_0^{\log 2} \frac{e^x - 1}{e^x(e^x+1)}\, dx.$$

3. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(-1)^n 2^n}$.

a) Determine o intervalo de convergência da série dada e a sua soma.

b) Sendo $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(-1)^n 2^n}$, indique $f^{(100)}(2)$.

(2,0) IV. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(1) = 1$ e que, para qualquer $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2 f(x)^2}.$$

1. Mostre que, para qualquer $x \geq 1$,

$$f(x) \leq 1 + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

(**Sugestão**: Poderá ser-lhe útil verificar que f é crescente.)

2. Prove que existe o limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}.$$