Álgebras de Lie

Ficha 1

Salvo quando explicitamente mencionado, todas as álgebras de Lie são complexas e de dimensão finita. A notação segue o livro [H], com as modificações: $\mathsf{F} \mapsto \mathbb{C}$, $[\ ] \mapsto [,]$ e os caracteres góticos passaram a *sans-serif*.

1. Seja L o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ com o comutador dado pelo produto exterior entre dois vectores:

   $$[x, y] = x \times y, \qquad x, y \in \mathbb{R}^3.$$

   Verifique que L é uma álgebra de Lie e determine as suas constantes de estrutura relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

2. Seja (x, h, y) a base ordenada de $\mathsf{sl}(2, \mathbb{C})$ dada por

   $$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Calcule as matrizes de ad_x, ad_h e ad_y nesta base.

3. Seja L a álgebra de Lie de dimensão 2 dada por

   $$[x, y] = x$$

   onde (x, y) constitui uma base de L. Determine uma álgebra de Lie linear (subálgebra de $\mathsf{gl}(V)$, para certo espaço vectorial V) isomorfa a L. [Sugestão: considere a representação adjunta].

4. Seja $x \in \mathsf{gl}(n, \mathbb{C})$ um endomorfismo com n valores próprios distintos $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}$. Prove que os valores próprios de ad_x são precisamente os n^2 escalares $a_i - a_j$, $1 \le i, j \le n$.

5. Seja $\mathsf{s}(n, \mathbb{C})$ o subconjunto das matrizes escalares (múltiplos escalares da identidade) em $\mathsf{gl}(n, \mathbb{C})$. Prove que $\mathsf{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathsf{sl}(n, \mathbb{C}) + \mathsf{s}(n, \mathbb{C})$ e que $[\mathsf{gl}(n, \mathbb{C}), \mathsf{s}(n, \mathbb{C})] = 0$.

6. Prove que $[\mathsf{gl}(n, \mathbb{C}), \mathsf{gl}(n, \mathbb{C})] = [\mathsf{sl}(n, \mathbb{C}), \mathsf{sl}(n, \mathbb{C})] = \mathsf{sl}(n, \mathbb{C})$.

7. Seja L uma álgebra de Lie. Prove que o conjunto $\{ad_x : x \in L\}$ é um ideal de $Der(L) \subset \mathsf{gl}(L)$.

8. Mostre que $\mathsf{sl}(2, \mathbb{C})$ é simples. Mais geralmente, mostre que se L é uma álgebra de dimensão 3 igual à sua derivada $L = [L, L]$, então L é simples [observe que qualquer imagem homomorfa de L também é igual à sua derivada].

9. Mostre que $\mathsf{t}(n, \mathbb{C})$ e $\mathsf{d}(n, \mathbb{C})$ coincidem com o seu normalizador em $\mathsf{gl}(n, \mathbb{C})$ e que $N_{\mathsf{gl}(n,\mathbb{C})}(\mathsf{n}(n, \mathbb{C})) = \mathsf{t}(n, \mathbb{C})$.

10. Prove que são ideais todos os termos da série derivada e todos os termos da série central descendente de uma álgebra de Lie.

11. Prove que qualquer álgebra nilpotente tem um ideal de codimensão 1.

12. Mostre que uma álgebra de Lie L é resolúvel se e só se existe uma cadeia de subálgebras

$$L = L_0 \supset L_1 \supset ... \supset L_n = 0$$

tal que L_{j+1} é um ideal de L_j e todos os quocientes L_j/L_{j+1} são abelianos.

13. Prove que L é resolúvel se e só se $ad(L)$ é resolúvel.

14. Seja V um espaço vectorial de dimensão finita e $L = \mathsf{sl}(V)$. Prove que $Rad(L) = Z(L)$ e conclua que L é semisimples.

15. Se $x, y \in End(V)$ comutam prove que $(x+y)_s = x_s + y_s$ e que $(x+y)_n = x_n + y_n$ [Sugestão: mostre primeiro que se x e y são semisimples (resp. nilpotentes) então $x + y$ também é semisimples (resp. nilpotente)]. Mostre que estas propriedades falham se x e y não comutam.

16. Seja V um espaço vectorial de dimensão finita e L uma subálgebra resolúvel de $\mathsf{gl}(V)$. Mostre que $Tr(xy) = 0$ sempre que $x \in [L, L]$ e $y \in L$.

17. Encontre um exemplo de uma álgebra de Lie que verifique $[L, L] = L$ e que não seja semisimples.

Referências

[H] J. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag GTM 9, 1972.