Álgebras de Lie

Ficha 2

1. Mostre que L é resolúvel se e só se $[L, L]$ está contido no radical da forma de Killing.

2. Seja L a álgebra de Lie dada por
$$[x, y] = z, \quad [x, z] = y, \quad [y, z] = 0$$
onde (x, y, z) formam uma base de L. Calcule o radical da forma de Killing e mostre que não coincide com o radical de L.

3. Considere a álgebra de Lie $\mathsf{sl}(2, \mathbb{C})$ e a sua base standard:
$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Determine a base dual relativamente à forma de Killing.

4. Seja V um L-módulo. Prove que V é uma soma directa de submódulos irredutíveis se e só se cada L-submódulo de V possui um complemento.

5. Prove que, se L é resolúvel, qualquer representação de L é unidimensional.

6. Seja L uma álgebra de Lie simples. Prove que quaisquer duas formas simétricas, bilineares, associativas e não-degeneradas em L são múltiplas uma da outra. [Sugestão: Use o lema de Schur]

7. Considere a inclusão $\mathsf{sl}(2, \mathbb{C}) \subset \mathsf{sl}(3, \mathbb{C})$ definida tomando as matrizes 2×2 no canto superior esquerdo, e a acção de $\mathsf{sl}(2, \mathbb{C})$ em $M \equiv \mathsf{sl}(3, \mathbb{C})$ dada pela representação adjunta. Mostre que a decomposição de M em $\mathsf{sl}(2, \mathbb{C})$-módulos irredutíveis é
$$M = V(0) \oplus V(1) \oplus V(1) \oplus V(2).$$

8. Verifique que, sendo $v_i,\ i \geq 0$ com $v_i = \frac{1}{i!} f^i \cdot v_0$ (e $v_{-1} = 0$) elementos de um espaço vectorial V (de dimensão finita ou infinita) e $\lambda \in \mathbb{C}$, as fórmulas

$$\begin{aligned} h \cdot v_i &= (\lambda - 2i) v_i \\ f \cdot v_i &= (i+1) v_{i+1} \\ e \cdot v_i &= (\lambda - i + 1) v_{i-1}, \end{aligned}$$

tornam V uma representação de $\mathsf{sl}(2, \mathbb{C})$.

9. Seja $L = \mathsf{sl}(n, \mathbb{C})$. Prove que o conjunto das matrizes diagonais em L é uma subálgebra tórica maximal de dimensão n.

10. Mostre que qualquer subálgebra tórica maximal de $\mathsf{sl}(2, \mathbb{C})$ tem dimensão 1.

11. Se L é semisimples e H uma sua subálgebra tórica maximal, prove que $N_L(H) = H$.

12. Para as álgebras $\mathsf{sl}(n, \mathbb{C})$ calcule explicitamente as cadeias de raízes e os inteiros de Cartan, verificando que sempre que α e β são raízes não proporcionais,
$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \{-1, 0, 1\}.$$

13. Mostre que qualquer álgebra de Lie semisimples de dimensão 3 tem o mesmo sistema de raízes que $\mathsf{sl}(2, \mathbb{C})$.

14. Prove que não existem álgebras de Lie semisimples de dimensões 2, 4, 5 e 7.